

6.4.2. L'incertitude et les anticipations

ARROW ET LES VALEURS MOBILIERES

Nous avons l marchés dans l'équilibre général atemporel. On est passé à $l.S$ dans l'équilibre intertemporel complet où S est le nombre d'états possibles à l'horizon temporel considéré. Dans l'article « The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing » (1953), Arrow propose un moyen de réduire ce nombre. Il s'agit de mettre à la disposition des agents le moyen de transférer du pouvoir d'achat d'un état contingent à un autre. Ces transferts sont nécessaires car certains états peuvent affecter négativement les revenus (invalidité) ou faire hausser les prix (sécheresse) ou les besoins (famille nombreuse). Des procédés de transfert existent. Le plus évident est la souscription de contrats d'assurance. Toutefois, ce moyen est insuffisant, car seuls une petite partie des risques potentiels sont assurables. C'est un autre procédé qu'Arrow met en avant : le placement en valeurs boursières.

Il imagine d'abord un cas d'école, certes irréaliste : que pour chaque état contingent, il existe une valeur boursière qui rend une unité de revenu si l'état se réalise et aucun revenu sinon. Cette condition serait suffisante pour rendre possibles tous les transferts de pouvoir d'achats désirables d'un état à l'autre. Dans ce cas, le nombre de marchés nécessaires passe de $l.S$ à $l+S$, en comptant ceux des valeurs mobilières.

Il s'agit certes d'une situation extrême. Dans la réalité, les titres ne collent pas aussi parfaitement aux états contingents. Toutefois, les titres réels, les actions plus que les obligations, sont assez liés aux états contingents de l'économie. Pensons par exemple à la solvabilité de l'émetteur, forcément dépendante de l'état s . Arrow estime que les titres réels peuvent être considérés comme des formes concaténées de ces valeurs élémentaires imaginaires.

RADNER ET LE MODELE D'ARROW-DEBREU EN ECONOMIE SEQUENTIELLE

L'article « Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets » (1972) de Roy Radner expose un modèle appliquant la suggestion d'Arrow. A chaque période /état, les agents qui désirent transférer du pouvoir d'achat achètent ou vendent des titres. Le cadre le plus adéquat est celui d'une *économie séquentielle*. A chaque période, certains marchés contingents font défaut mais cette lacune est compensée par l'existence de marchés boursiers.

Malgré l'économie séquentielle, on reste loin de l'équilibre temporaire hicksien, car la conception des anticipations diffère fondamentalement. Les anticipations des agents hicksiens pouvaient être démenties par les faits. Sous la forme d'une économie séquentielle, Radner élabore un modèle qui a les propriétés de fond de l'économie d'Arrow-Debreu. Notamment, les agents ont la faculté de prévision parfaite.

Concernant les anticipations, Radner écrit : « We can represent a trader's expectations as a function that indicates what the prices will be at a given date in each elementary event at that date. This includes, in particular, the representation of future prices as random variables, if we admit that the uncertainty of the traders about future events can be scaled in terms of subjective probabilities. I shall say that traders have *common* expectations if they associate the same (future) prices to the same events. This does not

necessarily imply that they agree on joint probability distribution »¹. L'hypothèse des anticipations communes suit logiquement celle des anticipations parfaites.

Radner se place comme observateur à la première période. Les périodes ultérieures appartiennent donc au futur et leurs prix n'existent encore que dans la tête des agents, comme anticipations. Mais l'équilibre général de Radner implique l'équilibre, non seulement des marchés présents mais aussi entre les anticipations. « An equilibrium of plans, prices, and price expectations is a set of prices on the first market, a set of common price expectations for the future and a consistent set of individual plans, one for each trader, such that, given the current prices and price expectations, each individual trader's plan is optimal for him, subject to an appropriate sequence of budget constraints »². Les prix d'équilibre qui s'établiront dans le futur confirmeront les anticipations présentes. Radner impose donc la condition que les prix anticipés annulent la demande excédentaire des échanges qui se produiront dans le futur.

Nous n'allons pas développer le modèle mais simplement l'esquisser. Une notion importante est la *paire date-événement*, c'est-à-dire une situation à un moment donné, caractérisée par la période t et l'état contingent s . Radner se réfère à l'arbre des événements de Debreu (graphique 6.8) et réinsiste sur le nombre FINI de périodes et d'états. A chaque date-événement m , les agents passent des contrats entre eux, prévoyant la livraison d'une quantité d'un bien h à la date-événement n , qui a lieu au même moment que m (contrat courant) ou qui lui est postérieure (contrat futur)³ et pour autant qu'existe un marché de n en m . Il y a un prix par marché correspondant à une combinaison de h , m et n . Le prix, exprimé en unités de compte, est payé lors de la conclusion du contrat.

Les consommateurs échafaudent des *plans de consommation* \mathbf{x}_i , les producteurs des *plans de production* \mathbf{y}_j , mais tous deux établissent également des *plans de contrats* \mathbf{z}_i et \mathbf{z}_j , qui reprennent les achats et ventes qu'ils projettent. Un plan de contrat se caractérise par les quantités achetées ou vendues des différentes combinaisons de m , n et h . A partir d'une situation m , l'ensemble des plans de contrat possibles et autorisés est noté Z_m . Radner impose une limite supérieure à ces livraisons : $z_{hmn} \leq L$ où L est arbitraire⁴. C'est à l'intérieur de cet ensemble, que le producteur ou le consommateur doivent optimiser leur choix en matière de contrats. Les plans de production des producteurs devront se concilier avec leurs plans de contrats, en ce sens qu'il doit y avoir égalité entre la production qu'ils projettent en n et la totalité des contrats qui prévoient une livraison en n . De même, le plan de consommation de l'individu i devra être compatible avec son plan d'achats, compte tenu de son allocation initiale en biens.

Les consommateurs établissent également des *plans de portefeuille*, un plan à chaque m . Sur le marché financier se traitent les actions des entreprises j . Celles-ci donnent droit à une part du bénéfice de j en chaque n postérieur à m . Si f_{ij} est la part (comprise entre 0 et 1) de l'entreprise j que détient le consommateur i au temps t , la valeur du

¹ Radner [291] p. 289

² Radner [291] pp. 289-290

³ Il y a donc la date-événement m pour la décision et la date-événement n pour la livraison-paiement. Il faut bien sûr que n soit compatible avec les événements antérieurs (passage possible le long des branches de l'arbre des événements).

⁴ Il écrit : « An upper bound on allowable contracts is natural; for example, a contract to deliver a quantity vastly greater than the total supply of the commodity would not be credible » ([291] p. 291).

portefeuille de i en m est le produit vectoriel $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{f}_{im}$, où \mathbf{v}_m est le vecteur de prix des titres en m et \mathbf{f}_{im} est le vecteur des f_{imj} ($j = 1 \dots J$). Quant au revenu que i tire de son portefeuille au temps n , il vaut $\sum_j \mathbf{f}_{inj} \cdot \mathbf{z}_{nj} \cdot \mathbf{p}_n$.

Formellement, l'équilibre de Radner se caractérise par :

1. un ensemble de prix (non négatifs et pas tous nuls) pour chaque marché de bien (paramètres h , m et n) et pour chaque titre (paramètres j et m), répondant à une règle de normalisation.
2. pour chaque producteur un plan de production \mathbf{y}_j et un plan de contrats \mathbf{z}_j qui maximisent ensemble sa fonction d'utilité individuelle. On ne peut parler directement de maximisation du profit, car celui-ci est incertain : il faut donc passer par une fonction d'utilité permettant de répartir des profits comportant des risques différents.
3. pour chaque consommateur, un plan de consommation \mathbf{x}_i , un plan de contrats \mathbf{z}_i et un plan de portefeuille en actions. Ces plans maximisent ensemble l'utilité rapportée par \mathbf{x}_i , compte tenu des contraintes budgétaires. Celles-ci tiennent compte des revenus des actions et des achats et ventes sur le marché des titres, ainsi que de l'allocation initiale en titres.
4. la consistance de tous les *plans de contrat* pour tous les m . Cette consistance correspond à l'annulation de la demande excédentaire projetée.
 $\sum_k z_{km} = 0$ pour tout marché m , où k est l'addition des i et des j .
5. la répartition des titres des entreprises entre les consommateurs, de telle sorte que le capital de toutes les entreprises est entièrement souscrit.

Radner démontre mathématiquement qu'un tel équilibre existe aux conditions habituelles dans ce genre de démonstration : non satiété, convexité (et fermeture) des ensembles de production et de consommation faisables, continuité et de concavité des fonctions d'utilité (donc aversion pour le risque). Il faut toutefois ajouter une condition supplémentaire concernant le marché des actions : « However, an equilibrium can fail to exist if some provision is not made for the elimination of unprofitable enterprises »⁵. Les pertes des entreprises et leurs conséquences sur la situation financière de leurs actionnaires sont un élément perturbateur.

L'émergence de l'équilibre sur les marchés spot n'est possible que parce que l'offre et la demande s'y confrontent réellement. Le commissaire-priseur peut déterminer les variations de prix qui devraient annuler ou réduire la demande excédentaire. Est-il prévu dans l'économie de Radner que les agents doivent soumettre leur *plan de contrat* au commissaire-priseur ? Si ce n'est pas le cas, l'équilibre, certes possible, n'a aucune chance d'advenir. Si c'est le cas, c'est un pas de plus dans l'abstraction.

Il est dommage que le modèle ignore toute relation entre les profits espérés et la valeur des actions.

L'apparition d'une fonction d'utilité au niveau des firmes, mêlant profit et risque, doit être saluée. La prise au sérieux des entreprises est trop rare dans l'économie néoclassique.

⁵ Radner [291] p. 289

Equilibre de Radner et anticipations rationnelles

Dans un autre article, paru en 1979, Radner étudie la relation entre l'information, les décisions prises et l'équilibre. La thèse de l'article, basée sur la distinction entre l'information exogène et l'information endogène, est celle-ci : « When traders come to a market with different information about the items to be traded, the resulting market prices may reveal to some traders something about the information available to other traders (...) a rational expectations equilibrium reveals to all traders the information possessed by all the traders taken together »⁶.

Considérons d'abord l'information disponible comme un ensemble de signaux exogènes. Appelons s , l'ensemble complet des signaux disponibles dans une économie. Chaque agent (indiqué i) a accès à un sous-ensemble s_i de cette quantité de signaux. Sur base de ce sous-ensemble de signaux, il construit dans son esprit un système de *probabilités subjectives* quant aux rendements des actifs. Il s'agit de *probabilités conditionnelles* (probabilités de Bayes) : quelle est la probabilité de tel prix ou de tel rendement, SACHANT les différents signaux qui composent s_i . Soit π_i l'ensemble des distributions de probabilité (une par titre) formés subjectivement par l'agent i sur base de s_i .

Le vecteur π_i influence les offres et demandes, car les acteurs individuels tentent de maximiser l'*utilité espérée* de leurs choix. L'équilibre se définit toujours par un vecteur de prix \mathbf{p} qui annule la demande excédentaire. Il suffit donc que change l'information dont dispose un agent, pour que le vecteur des prix d'équilibre \mathbf{p} soit altéré.

A chaque contenu de l'information disponible s , on peut associer un vecteur \mathbf{p} d'équilibre. La question importante est de savoir si la correspondance entre les valeurs de s et celles de \mathbf{p} est biunivoque. Si elle l'est, il y a moyen, par une réflexion adéquate, de parcourir le chemin en sens inverse et d'inférer le signal sous-jacent à partir de la connaissance du vecteur \mathbf{p} . Radner qualifie un vecteur de prix satisfaisant cette condition, de *révélateur*.

Radner distingue trois cas :

- 1- tous les agents ont accès sans limite à la totalité de l'information disponible s . L'équilibre est appelé *Full communication equilibrium* (FCE). Un FCE fait correspondre un équilibre (demande excédentaire nulle) à chaque valeur de s .
- 2- les agents se répartissent en deux groupes : les bien-informés et les sous-informés. Un équilibre s'établira, différent du précédent, qui sera dépendant de la manière dont l'information est répartie (les s_i).
- 3- les agents non informés ont la qualité d'être *sophistiqués*, c'-à-d qu'ils « realize that there is a regular relationship between the total information signal and the market price »⁷. Ils adaptent leur demande en exploitant ce surplus d'information endogène qui s'ajoute à s_i . On obtient alors ce que Radner appelle un *rational expectations equilibrium* (REE). Ici, deux situations sont possibles :
 - soit l'équilibre est *révélateur* : dans ce cas, le vecteur de prix \mathbf{p} du REE correspondra exactement à celui du FCE.

⁶ Radner [292] pp. 655-656

⁷ Radner [292] p. 660

- Soit l'équilibre n'est pas révélateur. Alors, « initially uninformed traders cannot infer the state of the environment from the market price »⁸. Dans ce cas, l'équilibre sera le même que celui qui prévalait dans la deuxième hypothèse.

Radner démontre mathématiquement que le cas où il existe un équilibre d'anticipation rationnelle révélateur est de loin celui qui a le plus de chances de se produire. Mais cette démonstration repose sur une hypothèse forte : l'ensemble des signaux d'informations s doit être FINI. « One cannot expect in general that equilibrium prices will be revealing if the signal sets are 'too large'. For example, if the set of signals were Euclidian spaces, and the equilibrium prices were smooth functions of the joint signal, then the equilibrium prices could not be revealing if the dimension of the joint signal exceeded the number of commodities »⁹. Un système de mille prix ne peut informer sur un ensemble de dix mille paramètres qui les déterminent.

L'ÉCONOMIE DES MARCHÉS INCOMPLETS

Les *marchés incomplets* font l'objet d'une vaste littérature. Une structure de marchés est dite incomplète si l'absence de certains marchés rend inaccessibles certaines allocations de biens futurs contingents aux individus. Ceci implique que la bourse n'a pas réussi à jouer le rôle palliatif conçu par Arrow, pour l'une de ces deux raisons : soit les titres ne sont pas suffisamment nombreux, soit trop de titres différents procurent des rendements qui ne sont pas linéairement indépendants. Les titres ne couvrent pas l'intégralité des états contingents.

Le premier modèle est celui de Peter **Diamond** (1967). Les marchés d'actions ne permettent de compenser l'absence de marchés futurs contingents que partiellement. Les firmes choisissent leur plan de production de façon à maximiser la valeur des actions et les ménages constituent leur portefeuille dans l'optique de maximiser l'utilité de leur consommation. C'est un modèle simplifié à un bien où l'économie n'est pas séquentielle. Le résultat intéressant de ce modèle est que l'équilibre est un *optimum pareto-constraint*, c'est-à-dire qu'il domine suivant le critère de Pareto toutes les autres allocations accessibles, mais qu'il est moins optimal que s'il n'y avait pas de situations inaccessibles, c'est-à-dire si la structure de marchés était complète.

Dans son article « On the Optimality of Equilibrium when the Market Structure is Incomplete » (1975), Oliver **Hart** arrive à des conclusions moins optimistes que celles de Diamond et Radner. Il cible tout particulièrement l'équilibre de Radner. Pour démontrer que l'équilibre n'existe pas toujours ou qu'il n'est pas nécessairement optimal, le modèle présenté par Hart est calqué grosso modo sur celui de Radner. Il apporte toutefois les simplifications suivantes. On est en échange pur : il n'y a pas de production ; sans firmes, les titres ne sont pas des actions mais fonctionnent un peu comme des billets de loterie dont le gain dépend de l'état contingent s . À côté de ce gain, les ménages reçoivent à chaque période t une allocation $w_{it}(s)$, un ensemble de biens à échanger contre d'autres biens ou des titres. Il y a trois périodes : des titres sont négociés en t_1 et t_2 mais pas en t_3 car transférer du revenu vers le futur n'a plus de sens la dernière période. Le vecteur z_i donne la quantité des titres indicés (1,..f..F) détenus par l'agent i . Il n'y a pas de *plans de contrats* au sens que Radner attribuait à ce terme.

⁸ Radner [292] p. 663

⁹ Radner [292] p. 677

Comme chez Radner, les agents forment des anticipations parfaites et donc communes.

Dans ces conditions, l'équilibre est un ensemble de plan de consommation \mathbf{x}_i et de plans de portefeuille \mathbf{z}_i ($i = 1 \dots I$) ainsi qu'un système de prix (\mathbf{p}, \mathbf{v}) , tels que :

- Les contraintes budgétaires propres à chaque période sont respectées
- Pour chaque ménage, l'utilité de la consommation \mathbf{x}_i est maximisée
- A toutes les dates-événements, sur tous les marchés de biens, l'offre (le total des \mathbf{w}_i) égale la demande (le total des \mathbf{x}_i).
- A toutes les dates-événements, l'offre et la demande de chaque titre s'équilibrent.

Un tel équilibre, existe-t-il nécessairement ? Hart construit un exemple chiffré d'une économie simplifiée « that shows that even under all the standard convexity and continuity assumptions, an equilibrium may fail to exist »¹⁰, tant avec des prix d'équilibre linéairement dépendants qu'indépendants. Comment Radner avait-il échappé à cette conclusion ? Grâce à son hypothèse limitant les quantités échangées dans les contrats suivant la règle $z_{hmn} \leq L$. Si z_{hmn} est trop élevé, cela crée une discontinuité dans la contrainte budgétaire et donc dans la fonction de demande, qui rend l'équilibre impossible. Hart écrit : « The main objection to Radner's approach is that the upper bound L is not determined endogenously, but instead is fixed a priori »¹¹. Le côté arbitraire de L dérange Hart puisque, comme il le montre, l'équilibre dépend de la valeur choisie. Dans son modèle, il préfère ne pas fixer de limite quitte à accepter l'absence possible d'un équilibre.

Nous avons vu au sous-chapitre 6.3.2 que la *substituabilité brute* est une condition suffisante de l'unicité de l'équilibre d'Arrow-Debreu. Hart précise que ce n'est plus le cas en situation de *marchés incomplets*.

Hart se demande ensuite si lorsque l'équilibre existe, il est optimal. Pour simplifier, Hart limite la comparaison à des allocations qui peuvent être atteintes comme équilibres concurrentiels. Il donne des exemples chiffrés d'économies simplifiées comportant deux équilibres ; calculant l'utilité des (deux) agents, il montre que chaque fois, un équilibre pareto-domine l'autre, ce qui implique forcément qu'un équilibre n'est pas nécessairement optimal. Ces exemples « show that if markets are incomplete and there are at least two goods or at least three dates, one equilibrium may be pareto-dominated by another equilibrium »¹². Quand un équilibre révèle des vecteurs de prix linéairement indépendants dans l'état s_1 et dans l'état s_2 et l'autre des vecteurs linéairement dépendants, c'est évidemment le premier qui domine. Vu que les dividendes des titres sont payés sous forme d'un vecteur de biens, la dépendance des prix se répercute sur les rendements des titres.

Hart se demande encore « what happens if new securities become available at date 1 or date 2 ». Intuitivement, on penserait que l'utilité ne pourrait que s'en trouver améliorée. Pourtant, Hart construit des exemples d'économies simplifiées où l'ouverture de marchés supplémentaires fait empirer la situation des (deux) consommateurs. Pour

¹⁰ Hart [135] p. 427

¹¹ Hart [135] p. 431

¹² Hart [135] p. 435

s'assurer que l'ouverture de nouveaux marchés améliore la situation, il faut rendre la structure complète.

*

DREZE ET LA PROPRIETE DES ENTREPRISES

L'article « Investment Under Private Ownership » (1974) de Jacques Drèze construit un modèle à marchés incomplets assez particulier puisqu'il ne comporte pas de marchés de biens ; l'unique marché est celui des actions. C'est un modèle à bien unique et à deux périodes : la période actuelle, indicée 0, non contingente et la période 1, indicée par l'état contingent s ($s = 1 \dots S$). Le bien unique sert à la fois à la consommation et comme input unique dans la production, où il n'est pas combiné avec du travail, absent du modèle. Les actions donnent à leur détenteur-consommateur i ($i = 1 \dots I$) le droit à une fraction du produit de l'entreprise j ($j = 1 \dots J$), fraction indépendante de l'état s . Les vecteurs de consommation sont $x_i = (x_{i0}, x_{i1} \dots x_{iS})$; les vecteurs de la production sont $b_j = (a_{j0}, b_{j1} \dots b_{jS})$.

En période 0, les agents reçoivent une allocation qu'ils répartissent entre la consommation x_{i0} et l'investissement a_i . La période suivante, ils consomment la production b_{js} des entreprises au prorata de leur participation, ce qui leur procure une consommation x_{is} . La production b_{js} dépend de a_j et des contingences. Les plans de production et les préférences des consommateurs sont supposées revêtir les caractéristiques standard dans ce type de modèle.

Drèze s'intéresse à ce qu'il appelle des « programmes », notés z , qui sont chacun une combinaison (x, b, T) de I vecteurs x_i , de J vecteurs b_j et d'une matrice T des éléments θ_{ij} qui indiquent la répartition de la propriété des entreprises entre les individus. Il ne s'intéresse qu'aux programmes faisables : chaque individu gagne un revenu dont dépend sa contrainte budgétaire, qui provient entièrement des dividendes des titres qu'il détient. Il s'avère que l'ensemble Z de ces programmes dignes d'intérêt n'est pas nécessairement convexe.

Définir l'équilibre pour ces programmes est assez complexe. Drèze le conçoit avec deux volets :

- Equilibre des plans de production des firmes : elles maximisent la valeur nette de leur production à un système de prix fictifs (pour les différents états) qui sont la moyenne pondérée des prix fictifs maximisant l'utilité de leurs actionnaires-consommateurs.
- Equilibre sur le marché des titres grâce à un système de prix ad hoc, auquel les consommateurs optimisent leur portefeuille en maximisant l'utilité de leur consommation.

Moyennant certaines conditions, il existe un programme de Z associé à ces deux systèmes de prix qui est le programme d'équilibre en ce sens qu'aucun agent n'est incité à changer ses plans. Drèze démontre qu'un tel équilibre existe dans les conditions (sommairement) spécifiées ci-dessus.

Certains programmes de Z apportent un maximum d'utilité selon le critère bien connu de Pareto. Comme Diamond, Drèze les appelle *optimums Pareto-constraints*. Il démontre le résultat suivant : ces optimums sont toujours des équilibres au sens ci-

dessus, mais les équilibres ne sont pas nécessairement optimaux, du fait de la non-convexité de Z .