6.1.1. Le modèle de walras-cassel

CASSEL, CONTRE LES THEORIES DE LA VALEUR

En 1918, l'économiste suédois Gustav Cassel publie en langue allemande son traité d'économie politique « Theoretische Sozialökonomie ». Cet ouvrage couvre l'ensemble des questions économiques, mais nous limiterons notre analyse à sa partie microéconomique.

Comme dans beaucoup de traités, les premiers chapitres sont consacrés à l'échange. L'échange est réglé par ce que Cassel appelle le *principe de rareté*, qu'il définit ainsi : « The fixing of prices thus has the social economic task of so restricting the demands for goods that they can be met with the available means. »[1]. Cette définition se rapporte a l'échange pur, mais Cassel l'élargit a la production : "The demand for commodities is indirectly a demand for factors of production (…) it represents a conflict between consumers for the factors of production, a conflict which can be adjusted only by placing on the factors of production prices high enough to effect coincidence of demand with the available quantities of the factors of production"[2].

Cassel attaque le concept de VALEUR, parfaitement inutile selon lui. Ce qui compte, ce sont les PRIX, qui sont des faits observables. Il critique donc les deux principales théories de la valeur que sont la théorie de la valeur-travail et la théorie de l'utilité marginale et principalement cette dernière, car Cassel estime qu'elle pollue la tradition néoclassique à laquelle il adhère. Cette théorie est à la fois superflue et erronée. Le cerveau du consommateur n'est pas capable de déterminer un niveau d'utilité pour chaque degré de satisfaction de chaque besoin et encore moins de déterminer in abstracto un prix acceptable pour chaque bien sur pareille base. « This whole scale of reckoning is thus necessarily bound with existing prices »[3]. Le consommateur peut se positionner par rapport à des variations du système de prix existant, pas en concevoir un ex nihilo

Cassel enchaîne avec la relation entre le prix et le coût, dans laquelle il fait intervenir quatre principes. Du *principe de rareté*, Cassel déduit le *principe du coût* : « The pricing process which we have here described means that every finished commodity receives a price which corresponds to its cost of production, or, more generally, that every demand shall bear the whole cost of satisfying it »[4]. Le principe du coût doit être complété par le *principe différentiel* voulant que ce soit le coût du fournisseur le moins performant qui détermine le prix (unique) du marché et par le *principe de substitution* selon lequel parmi les méthodes de production accessibles, c'est la moins chère qui détermine le prix.

Comme Cassel rejette le concept de valeur, sa théorie explique les prix directement en monnaie. Il ironise contre l'habitude des économistes de concevoir l'économie comme un grand troc sur lequel on vient greffer la monnaie par la suite[5]. Dans sa critique,

[1] Cassel [46] p. 66
[2] Cassel [46] p. 90
[3] Cassel [46] p. 81
[4] Cassel [46] p. 93
[5] Au risque de se contredire, il prétend ailleurs que la demande n'est fonction que des prix relatifs et que les prix absolus ne peuvent être expliqués sans une théorie de la monnaie.

Wicksell estime au contraire que cette abstraction consciente de la monnaie « was the decisive step which first gave economics a truly scientific character »[6].

Après avoir analysé l'échange des biens, Cassel s'intéresse aux marchés des facteurs de production et donc à la répartition du revenu entre les classes sociales.

Concernant l'entrepreneur, Cassel distingue le *profit brut* et le *profit net*. Le profit brut est la rémunération que perçoit l'entrepreneur. Si celui-ci travaille dans son entreprise, une partie du profit brut est un salaire caché pour son travail. S'il y a investi du capital, une autre partie est un intérêt caché sur ce capital, en ce compris une prime de risque. Le profit net est le solde après déduction de ces éléments. Le niveau de ce profit est fort aléatoire et échappe à toute rationalisation.

Comme la théorie de l'utilité marginale ci-avant, Cassel conteste la théorie de la productivité marginale. Il invoque de nouveau cet argument : la productivité marginale dépend autant du prix qu'elle ne l'influence. Il reproche à cette théorie de surestimer la variabilité des facteurs de production. Néanmoins, son *principe de substitution* implique une certaine variabilité. La hausse du prix relatif d'un facteur stimulera sa substitution par un autre facteur, qui à son tour modérera la hausse du prix du facteur. Cela dit, la substitution entre les facteurs joue dans la formation de leurs prix un rôle secondaire en comparaison avec leur rareté. Concernant la substitution entre travail et capital, Cassel remarque qu'en cas de hausse généralisée des salaires, le prix des biens d'équipement s'en trouvera haussé, ce qui freinera la substitution.

En conséquence, les revenus payés pour les facteurs de production dépendent plus de leurs raretés relatives (relation entre l'offre et la demande) que des conditions techniques. Si la collectivité veut infléchir la répartition des revenus dans un sens moins inégalitaire, elle aurait tort de violenter le principe de rareté. Il est préférable de jouer avec les déterminants de l'offre et de la demande. Par exemple, par l'éducation, accroître l'offre de travail dans les qualifications plus productives et mieux payées.

Venons-en à la théorie du capital et de l'intérêt. Dans le système des prix, l'intérêt est un prix comme un autre, mû par le principe de rareté. Mais de quoi est-il le prix ? Non pas du capital, encore moins des biens-capitaux, mais de ce que Cassel appelle l'*attente* ou la *disposition du capital*. L'unité de mesure de la quantité d'attente est *M.T*, c'est-à-dire le montant en monnaie multiplié par le temps.

La façon dont Cassel explique la nature et la fonction de l'*attente* rappelle le rôle du temps dans la théorie autrichienne. Mais il y a une différence fondamentale. La théorie autrichienne considère le capital comme un facteur de production secondaire constitué par incorporation dans le temps des deux facteurs primaires que sont le travail et la terre. Pour Cassel, il y a trois facteurs primaires sur pied d'égalité : le travail, la terre et l'attente[7].

[6] Wicksell [385] p. 223

[7] Wicksell, généralement peu complaisant à l'égard de son collègue compatriote, reproche à Cassel cette conception hybride où le temps intervient mais où son rôle n'est pas distinct de celui des facteurs primaires. Selon lui, il fallait jouer soit la carte Walras (conception synchronique), soit la carte autrichienne.

Cassel critique d'ailleurs abondamment la conception de l'intérêt de Jevons, Böhm Bawerk et Fisher. La sous-estimation des jouissances futures par rapport aux présentes est un facteur inutile et partiellement erroné. Quant à la thèse que l'intérêt correspondrait à la productivité marginale de l'allongement de la période de production, Cassel considère qu'elle rend mal compte du capital fixe et il lui paraît possible d'étendre la production en augmentant le capital sans augmenter la période de production[8].

Comme tout prix, l'intérêt est animé par le principe de rareté. Il sert donc à restreindre la demande au niveau de l'offre. Le fait qu'une épargne considérable existerait déjà si le taux d'intérêt était nul importe peu. D'autant plus que Cassel est convaincu qu'avec un taux nul, la demande de capital tendrait vers l'infini. Cassel pense également que le taux d'intérêt devrait rester positif dans une économie stationnaire, car il faudrait toujours prévenir la consommation du capital.

Cassel reconnaît trois mobiles à l'épargne :
- le souci de son avenir qui anime chaque individu
- dans le chef des entrepreneurs, le désir de renforcer leur entreprise
- dans le chef des riches capitalistes, le prestige de la grande fortune

Cassel ne contredit pas catégoriquement l'idée généralement admise que l'épargne croît avec sa rémunération, mais il la tempère. Analysant les réflexes des intervenants mentionnés ci-dessus, il arrive à la conclusion que des variations du taux au sein d'une fourchette normale influeront peu sur le volume de l'épargne ; par contre, une baisse prolongée du taux qui l'amènerait en dessous de la limite inférieure de la fourchette entraînerait une chute brutale de l'épargne. L'analyse à court terme n'aurait donc pas tort de concevoir l'offre de capital comme donnée.

Entre les chapitres sur l'échange des produits et sur l'échange des facteurs, Cassel intercale un chapitre qui met l'équilibre général de l'économie en équations. Ce chapitre est bizarrement placé, car Cassel est obligé de prendre des hypothèses conservatoires simplificatrices concernant les facteurs de production et après l'analyse de ceux-ci, il ne revient plus sur ses équations[9]. Ces équations rappellent évidemment celles de Walras que Cassel se permet de ne pas citer. Elles s'en écartent toutefois, notamment par son refus de la notion d'utilité. A vrai dire, alors que les équations constituent la charpente des *Eléments* de Walras, celles de Cassel sont très sommaires en comparaison avec le contenu de la *Sozialökonomie*. Elles ont pourtant joué un rôle important dans l'histoire de la science économique, ce qui justifie la présence de Cassel dans ce chapitre.

Il y a quatre grands groupes d'équations dans lesquels interviennent n produits de consommation (indicés i) et r facteurs de production (indicés j). Les variables sont les p (prix des produits de consommation), les q (prix des facteurs), les a (coefficients techniques), les N (demande des produits), les S (offre des produits) et les R (offre de facteurs).

[8] Cette question sera débattue par Hayek et Knight (cf. sous-chapitre 9.2.1).

[9] Wicksell se demande comment Cassel intégrerait sa théorie du capital et de l'intérêt dans ses équations.

Le prix des produits s'égalise avec leur coût de production :

$$a_{i1}.q_1 + a_{i2}.q_2 + \ldots + a_{ir}.q_r = p_i \qquad \text{pour } i = (1\ldots n) \qquad (6.1)$$

Connaissant ces prix, on peut en déduire les demandes :

$$D_i = F_i\,(p_1, p_2, \ \ldots\ , p_n) \qquad \text{pour } i = (1\ldots n) \qquad (6.2)$$

Ces demandes doivent être égales aux offres :

$$D_i = S_i \qquad \text{pour } i = (1\ldots n) \qquad (6.3)$$

Connaissant l'offre des produits, on peut en déduire la demande qui sera faite des différents facteurs de production, et celle-ci doit s'adapter à leur offre :

$$R_j = a_{1j}.S_1 + a_{2j}.S_2 + \ldots + a_{nj}.S_n \qquad \text{pour } j = (1\ \ldots r) \qquad (6.4)$$

Sur base de cet enchaînement, Cassel conclut à l'existence de l'équilibre, sans avoir à procéder à un comptage global des équations et des inconnues[10].

Les hypothèses simplificatrices sont :
- la consommation des ménages est indépendante de la vente des facteurs
- les coefficients techniques a_{ij} sont fixes (malgré le principe de substitution)
- l'offre des facteurs (les R_j) est fixe. Les conclusions mitigées du chapitre consacré aux facteurs ne démentent pas cette hypothèse mais ne la confortent pas non plus.

Cassel introduit ensuite dans son système un taux de *croissance uniforme*[11] (dans le temps et entre les secteurs) de c%. En fait, il se contente d'une croissance sans progrès technique et sans accroissement de la richesse par individu. La quantité de tous les facteurs et les quantités produites augmentent uniformément de c%. Les prix d'équilibre restent invariables.

Des équations (6.1) à (6.4), Cassel tire les conclusions suivantes :
- La variation de la demande d'un produit n'affecte son prix que si elle entraîne un changement dans la demande des facteurs ou dans la méthode de production. Dans le cas des rendements croissants ou des rendements décroissants, le prix subira l'effet du changement d'échelle. D'une façon générale, les variations du coût de production constituent le principal levier des variations du prix.
- Les prix subissent l'influence de facteurs OBJECTIFS (les R_j et les a_{ij}) et de facteurs SUBJECTIFS (les F_i). Isolées, la théorie du coût et celle de l'utilité marginale souffrent donc d'une insuffisance constitutive.
- La répartition des revenus fait intrinsèquement partie de la problématique de la formation des prix ; c'est une erreur de la considérer comme un chapitre à part de la théorie économique. Ici, Cassel se contredit, car il fait suivre ses équations d'un chapitre consacré aux facteurs de production et les équations sont loin de rendre compte des subtilités exposées dans ce chapitre.

---

[10] Le nombre d'équations (3n+r) est certes égal à celui des inconnues (p_i, D_i, S_i, q_j), mais Cassel ne justifie pas l'existence de l'équilibre par cette égalité.

[11] Ce type de croissance stable apparaîtra dans de nombreux modèle. Je la désignerai dans la suite par le qualificatif *semi-stationnaire* que j'emprunte à Bliss qui la caractérise ainsi : « the development of the economy through time is assumed to exhibit a repetitive aspect so that what happens in each week is the same as what happens in every other week, except perhaps for a change of scale » ([38] p. 62). La terminologie "steady state" est courante chez nombre d'économistes.

LE « COLLOQUE VIENNOIS » ET LE MODELE DE WALD

Le livre de Cassel eut un certain retentissement ; c'est par lui que la pensée walrassienne s'introduisit à Vienne. Dans la capitale autrichienne entre les deux guerres, de jeunes mathématiciens d'Europe centrale. Karl Menger (le fils de Carl Menger), Karl Schlesinger, Hans Neisser, Abraham Wald et d'autres se mobilisèrent sur la problématique de l'équilibre général et tentèrent d'améliorer le modèle Walras-Cassel.

Première avancée, la démonstration de l'existence de l'équilibre général par Walras n'était pas satisfaisante d'un point de vue mathématique. L'égalité entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues n'est ni une condition suffisante, ni une condition nécessaire pour l'existence d'une solution d'équilibre. Wald apportera une nouvelle démonstration de cette existence, fondée sur la *programmation linéaire*, encore en développement à cette époque.

Deuxième avancée : « Professor Neisser remarked that the casselian system might have negative values of prices or quantities as solution. Negative quantities are clearly meaningless and at least in the case of capital and labor, negative prices cannot be regarded as acceptable solutions since the supply at those prices would be zero »[12]. Comment nos mathématiciens ont-ils résolu ce problème ?

Rappelons-nous deux égalités fondamentales du modèle Walras-Cassel :
1. l'égalité (6.4) entre l'offre (la quantité disponible) d'un facteur et la demande de ce facteur.
2. l'égalité (6.1) entre le prix des produits et leur coût de production.

La solution consiste à remplacer ces égalités par des inégalités, moyennant l'ajout d'une contrainte collatérale. Le prix doit être inférieur ou égal au coût de production, mais s'il est inférieur, la quantité sera nulle ; l'offre du facteur doit être supérieure ou égale à la demande mais si elle est supérieure, le prix doit être nul (bien libre).

Le modèle de Wald de 1936

Abraham Wald a démontré deux théorèmes énonçant l'existence de l'équilibre général. Le premier revient aux fondements walrassiens, mais il réduit son champ d'analyse à l'échange pur (absence de facteurs de production). Les agents offrent et demandent des biens de façon à maximiser leur utilité en respectant une contrainte budgétaire. S'y ajoute une contrainte d'égalité de l'offre et la demande au niveau du marché. Comme celles de Walras, les fonctions d'utilité de Wald postulent que l'utilité marginale de chaque bien est indépendante de la quantité que l'agent détient des autres biens.[13]

Nous n'analysons ici que l'autre modèle, qui est d'inspiration cassellienne. Wald adapte le système d'équations de son prédécesseur. Présentons le en gardant la notation de Cassel :

$$R_j = a_{1j}.S_1 + a_{2j}.S_2 + \ldots + a_{nj}.S_n + u_j \qquad (j = 1\ldots r) \qquad (6.5)$$

[12] Arrow-Debreu [17] p. 288
[13] C'est un retour en arrière par rapport à Edgeworth et Pareto.

$u_j.q_j = 0$ (j = 1…r) (6.6)

$p_i = \Sigma_{j=1,}{}^{r}\, a_{ij}.q_j$ (i = 1…n) (6.7)

$p_i = f_i(S_{1\ldots}S_n)$ (i = 1…n) (6.8)

- L'équation (6.5) correspond à (6.4) avec en plus le terme u_j qui représente à la part non utilisée du facteur j, qui sera nulle si le facteur est rare. C'est une manière de transformer la première égalité casselliennne en inégalité (cf. supra).
- L'équation (6.6) dit que soit le prix, soit la quantité non utilisée du facteur doit être nul. C'est la contrainte collatérale mentionnée ci-dessus. Walras et Cassel avaient simplement éliminé les facteurs non rares de leur modèle ; Wald estime qu'un facteur n'est pas rare par nature, mais que sa rareté est elle-même une variable endogène. « Whether factors are free or scarce cannot be considered, a priori, a datum of the economy; it can only be determined on the basis of the production equations »[14].
- L'équation (6.7) correspond à (6.1).
- Enfin, (6.8) cumule (6.2) et (6.3), mais on remarque avec étonnement que Wald inverse la relation entre le prix (p_i) et la quantité échangée (S_i) généralement admise.

Les inconnues sont les u_j, q_j, p_i, s_i,. Wald a démontré l'existence d'une solution non négative unique pour le système d'équations (6.5 à 6.8), pour autant que soient satisfaites les conditions suivantes :

1- Il n'y a pas d'épargne
2- une seule technique de production est possible par produit (coefficients fixes)
3- $R_i > 0$: existence d'une quantité positive de chaque facteur
4- $a_{ij} \geq 0$: la quantité d'un facteur utilisée dans la production d'un bien ne peut être négative
5- pour chaque bien, au moins un facteur est nécessaire à sa production
6- La relation entre le prix et la quantité demandée est continue
7- La demande d'un bien ne s'annule que lorsque son prix devient infiniment grand.
8- Si l'on observe les équations (6.7), les a_{ij} constituent une matrice de *r* colonnes et *n* lignes. Elle doit être de rang *r*.
9- Last but not least, Wald impose une restriction sur la fonction de demande, qui revient à formaliser la condition que le comportement des consommateurs doit être rationnel. Examinons-la de plus près.

Supposons qu'une économie passe d'un système de prix **p** à un système **p'**[15]. Considérons la fonction de demande générale, c'est-à-dire multiproduits[16] que nous notons **d.** Le changement la fait passer à **d'**[17]. La demande (partielle) de certains biens augmente alors que d'autres biens voient la leur baisser. Valorisons les vecteurs **d** et **d'** à l'ancien système de prix **p** et supposons que la dépense totale **d'.p** ne soit pas

[14] Wald [378] p. 371

[15] **p** est le vecteur ($p_1,p_2,\ldots p_n$) et **p'** est le vecteur ($p'_1,p'_2,\ldots p'_n$), dont les éléments sont les prix des *n* biens.

[16] Cette fonction de demande, non dessinable, fait correspondre une combinaison de quantités de l'ensemble des biens pour chaque combinaison des prix de l'ensemble des biens. Cette conception de la fonction de demande est la seule qui soit rigoureuse scientifiquement.

[17] **d** et **d'** sont également des vecteurs à *n* éléments.

supérieure à **d.p**. Selon le postulat de Wald, on peut en inférer que valorisée au nouveau système de prix **p'**, la dépense **d'.p'** doit être inférieure à **d.p'**. En effet, si lorsque le système de prix valait **p**, le lot de biens **d** était préféré à **d'**, il doit rester préféré à **d'** lorsque le système de prix s'établit à **p'** et seule une motivation budgétaire peut expliquer le déplacement de la demande de **d** à **d'**.

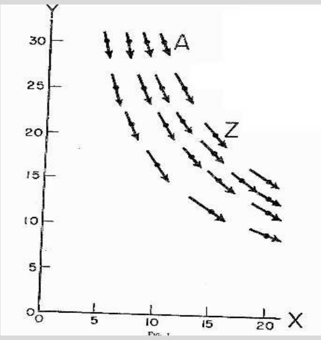
Cette neuvième condition est importante ; elle sera plus tard appelée ***axiome faible de la préférence révélée***, et deviendra un pilier de la théorie moderne du consommateur.

Jusqu'ici, Wald considérait la demande du marché, mais *l'axiome de la préférence révélée* peut aussi convenir pour caractériser la demande d'un consommateur individuel. Le fait que cette condition soit satisfaite au niveau du marché n'implique nullement qu'elle le soit au niveau des individus qui le composent. Par contre, si elle est vérifiée au niveau de tous les consommateurs individuels, il est statistiquement peu probable (mais non impossible) qu'elle ne le soit pas au niveau du marché.

Wald remarque que son système produit, non des prix relatifs comme on aurait pu s'y attendre et comme il eût été logique, mais des prix absolus. L'équation (6.8) norme en fait implicitement le système en liant les quantités aux prix.

Samuelson et l'axiome de la préférence révélée
Indépendamment de Wald, Samuelson a usé de ce même postulat dans deux articles (1938, 1948) pour simplifier la théorie du consommateur. Rappelons que l'aspect non observable de l'utilité marginale décroissante avait conduit les économistes à lui préférer la théorie du taux marginal de substitution croissant. Mais Samuelson avoue ne pas encore être satisfait : « For just as we do not claim to know by introspection the behaviour of utility, many will argue we cannot know the behaviour of ratios of marginal utilities or of indifference directions. Why should one believe in the *increasing rate of marginal substitution*, except in so far as it leads to the type of demand functions in the market which seem plausible? »[18]. Samuelson ne se résout pas à voir la théorie économique dépendre de concepts découlant de l'introspection psychologique ; il veut fonder la théorie du consommateur sur des faits observables : « I propose, therefore, that we start a new in direct attack upon the problem, dropping off the last vestiges of utility analysis ».

A l'aide d'un modèle simplifié à deux biens (consommés en quantités x et y), Samuelson montre que de la seule observation des triplets (x, y, p_x/p_y), amène à des déductions qu'on peut rapprocher de la théorie existante du comportement du consommateur[19]. La présomption fondamentale que si un duo *x,y* a été constaté pour un rapport de prix et un revenus donnés, c'est qu'il a été préféré à tous les autres.



Chaque point de l'espace *x,y* est une combinaison des quantités consommées, à laquelle correspond un rapport de prix d'équilibre (par hypothèse un seul) représentable par un segment de la droite de budget. On a en chaque point : px/py = f(x,y), fonction observable présumée continue et différentiable. Considérons en chaque point une portion infinitésimale des ces droites de prix (dont la pente égale dy/dx). On a donc l'équation différentielle dy/dx = -f(x,y) ; elle définit un ensemble de courbes dans le champ (x,y) semblables aux courbes d'indifférence bien connues. Samuelson démontre mathématiquement que par rapport à un point, ceux qui sont au-dessus de la courbe passant par lui sont révélés supérieurs et ceux qui sont en-dessous sont révélés inférieurs. La préférence révélée nous ramène aux résultats de la théorie traditionnelle.

[18] Samuelson [309] p. 61
[19] Samuelson suppose que les données empiriques relatives à ces triplets sont disponibles en quantité suffisante, une hypothèse qui a été critiquée. L'autre critique principale portée contre la théorie de la préférence révélée est que les variations entre les demandes constatées à des prix différents peuvent être polluées par un facteur non observable, en l'occurrence un changement de goût du consommateur entre les différents relevés.

6.1.2. von Neumann : le modèle de production linéaire

Un des esprits les plus brillants du XXe siècle, à la fois mathématicien, logicien, physicien et économiste. John von Neumann, né à Budapest et qui avait adhéré au colloque viennois, rejoignit les Etats-Unis en 1932 après un passage par Berlin.

Son article **« A Model of General Economic Equilibrium » (1937)** fait avancer la problématique qui nous occupe à de nombreux égards. Comme son titre l'indique, il s'agit toujours de démontrer l'existence d'un équilibre général. Par rapport aux modèles précédents, principalement celui de Wald, de nombreuses améliorations sont apportées :

1- L'input de la production comporte non seulement des facteurs primaires mais également des biens produits. A la manière de Sraffa, les marchandises sont produites par des marchandises (processus dit « circulaire »). Un bien peut être un input de sa propre production, des biens différents peuvent se servir d'input mutuellement.

2- Wald avait remplacé l'égalité (6.4) du modèle de Walras-Cassel par une inégalité. von Neumann reprend l'inégalité de Wald et fait de même pour la égalité (6.1). Du fait de la concurrence qui rabote le profit, il reste exclu que le prix soit supérieur au coût de production. Par contre, le prix d'équilibre peut être inférieur au coût de production ; dans ce cas, on impose la condition que la quantité produite soit nulle, car la production ne serait pas rentable.

3- von Neumann se départit des coefficients fixes de Cassel. Un même bien peut être produit par plusieurs combinaisons différentes d'inputs, que nous appellerons *activités*. Le nombre de combinaisons produisant un bien est fini, ce qui nous éloigne des isoquantes qui comportaient une infinité de combinaisons entre les facteurs de production.

4- Le modèle est dynamique. Le temps est divisé en périodes. A chaque période, l'output de la période précédente devient l'input de la nouvelle période. La croissance économique est présumée. Comme chez Cassel, le concept est celui d'une *croissance semi-stationnaire*. La répartition de la production ne change pas mais seulement son échelle, qui croît à un rythme régulier.

von Neumann a réellement inventé un nouveau type de fonction de production. Voyons comment elle se présente.

Une économie produit n biens (indice j) par l'exercice de m activités (indice i). Dans chaque activité, différents biens interviennent comme input et comme output. Lorsqu'une activité comporte plusieurs outputs, on a affaire à une production jointe.

Pour chaque activité, on définit un peu arbitrairement un niveau d'activité unitaire. Le niveau unitaire de l'activité ne correspond pas nécessairement à une unité du produit, parce que précisément une activité peut avoir plusieurs produits différents dans son output. Ce niveau unitaire est une abstraction.

Pour décrire la production d'une économie, von Neumann a besoin de deux matrices et un vecteur :

- La matrice **A** donne les inputs des différents biens dans les différentes activités. Ses composants sont les a_{ij}, qui représentent la consommation du bien *j* par l'activité *i* lorsqu'elle est à son niveau unitaire. Si le bien *j* n'entre pas dans l'activité *i*, a_{ij} sera nul.
- La matrice **B** donne les outputs des différents biens dans les différentes activités. Ses composants, les b_{ij}, indiquent la quantité du bien *j* qui sort de l'activité *i* lorsqu'elle est conduite à son niveau unitaire. Si le bien *j* ne sort pas de l'activité *i*, b_{ij} sera nul.

Matrice **A**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrice **B**

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

- Comme les matrices **A** et **B** indiquent la circulation des biens quand les différentes activités sont à leur niveau unitaire, il faut préciser à quel niveau (combien d'unités abstraites) sont conduites les différentes activités. Soit x_i, le niveau de l'activité *i*. Le vecteur **x**, à *m* éléments $x_1 \dots x_m$, synthétise ces informations. Comme aux différentes échelles des activités, les coefficients a_{ij} et b_{ij} restent identiques, les rendements d'échelle sont constants.

L'une des simplifications excessives de ce modèle est que la consommation n'y apparaît pas en tant que telle. La consommation est considérée comme l'input des fournisseurs de facteurs primaires. Vu sous cet angle, le beurre est un input de l'acier car il est nécessaire pour faire vivre ceux qui travaillent dans cette branche et que le travail n'intervient pas en tant que tel dans le modèle.

Voyons maintenant le modèle. Les ingrédients en sont :

- les coefficients a_{ij} et b_{ij}.
- le vecteur **x** de l'échelle de production des différentes activités, dont on peut déduire la quantité produite des différents biens.
- le vecteur **p** des prix des *n* biens.
- *r*, le taux d'intérêt d'une période à la suivante
- *g*, le taux de croissance de la production d'une période à l'autre.

Les inconnues sont **x, p**, r et g. Dans la solution d'équilibre, **x** comportera des valeurs nulles pour toutes les activités non rentables.

Le modèle s'articule autour de deux inéquations fondamentales :

$$(1+g).\Sigma_{i=1}^{m} a_{ij}.x_i \leq \Sigma_{i=1}^{m} b_{ij}.x_i \qquad (6.9)$$

En quantité, l'output vaut l'input multiplié par (1+g). Plus précisément, on accepte que le membre de gauche puisse être inférieur mais alors certains facteurs seront libres et leur prix sera nul. C'est l'inégalité de Wald.

$$(1+r).\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}.p_j \geq \Sigma_{j=1}^{n} b_{ij}.p_j \qquad (6.10)$$

En valeur, l'output vaut l'input multiplié par (1+r). Plus précisément, on accepte que le membre de gauche soit supérieur, mais alors la production n'est pas rentable et la quantité produite (et donc x_i) sera nulle. C'est l'inégalité introduite par von Neumann.

von Neumann démontre que le problème a une solution en faisant appel à des progrès mathématiques récents (notamment le théorème du point fixe de Brouwer):

A l'arrivée, von Neumann obtient le résultat suivant :

$$r = g \qquad \text{avec } 1+r = 1+g = \phi(\mathbf{x},\mathbf{p}) \qquad (6.11)$$

où

$$\phi(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{n} b_{ij}.x_i.p_j \,/\, \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}.x_i.p_j \qquad (6.12)$$

$\phi(\mathbf{x},\mathbf{p})$ correspond au rapport de la valeur totale de l'output sur la valeur totale de l'input. Tout en restant prudent car les deux approches diffèrent, on peut rapprocher le $\phi(x,p)$ de von Neumann avec le (1+R) de Sraffa.

L'équation (6.11) exprime que l'équilibre de von Neumann implique l'égalité entre *r* (le taux de profit) et *g* (la croissance de la production). Cette égalité se retrouvera plus tard fréquemment dans des modèles de croissance, en tant que condition de la maximisation de la consommation ; elle est connue sous le nom de la *règle d'or de la croissance*.

Kurz met en évidence certaines similitudes entre von Neumann et Sraffa :

1. L'équilibre général est un équilibre à long terme basé sur un taux de profit uniforme.
2. La production est conçue comme un flux circulaire. Chaque bien est susceptible d'apparaître non seulement comme output mais également comme input dans la production.
3. La relation entre le salaire et l'intérêt est telle que l'une des variables est endogène et l'autre exogène. Chez von Neumann, c'est nécessairement le salaire (ou plutôt son fantôme) qui est exogène ; chez Sraffa, c'est indistinctement l'un ou l'autre.
4. von Neumann utilise la même astuce que Sraffa pour le capital fixe. Le bien capital d'âge *t* apparaît parmi les inputs et le bien capital d'âge t+1 du côté des outputs.

*

Walras : voir extrait 10