8.1- L'EPARGNE OPTIMALE SUIVANT RAMSEY

Nous avons évoqué plus haut l'article de Ramsey « A Mathematical Theory of Saving » paru en 1928 ; revenons-y. C'est par sa réponse à la question « how much of its income should a nation save ? » que cet article devint célèbre. Le modèle se place dans une optique dynamique. Ramsey cherche à définir une règle qui, appliquée tout au long d'un intervalle de temps, conduit la société à l'optimum. Il postule implicitement que la société est capable de mettre en œuvre sa règle optimale, mais ne tente pas d'expliquer par quel moyen une économie de marché y parviendrait.

Ramsey adopte nombre d'hypothèses simplificatrices :
- L'économie compte un nombre constant d'agents. Leurs fonctions d'utilité par rapport à la consommation et au travail ne changent pas. « Enjoyments and sacrifices at different times can be calculated independently and added »[1].
- L'innovation technologique est absente. L'amélioration de la production ne peut provenir que de l'accumulation quantitative du capital.
- Abstraction est faite de la distribution du revenu. La satisfaction totale de l'ensemble des membres de la société dépend uniquement du total de la consommation sociale et du total du travail effectué.
- Le modèle considère le travail, le capital et la consommation comme s'il s'agissait de grandeurs homogènes.
- L'Etat établit aujourd'hui un plan d'épargne qui courra sur une très longue période, qu'appliqueront des générations successives Les motifs qui guident l'épargne et la consommation transcendent les générations. Une génération égoïste ne viendra pas consommer ce qui fut accumulé par les prédécesseurs pour ne rien laisser aux successeurs. La génération de départ élabore un plan d'épargne-investissement, suivant la règle que nous devons justement établir ; rien ne viendra troubler ce plan.

On a les variables a(t), c(t) et x(t) qui représentent respectivement la quantité de travail, la quantité de capital et la consommation au temps *t*. La fonction de production est donc *f(a,c).* Le taux d'intérêt égale la productivité marginale du capital.

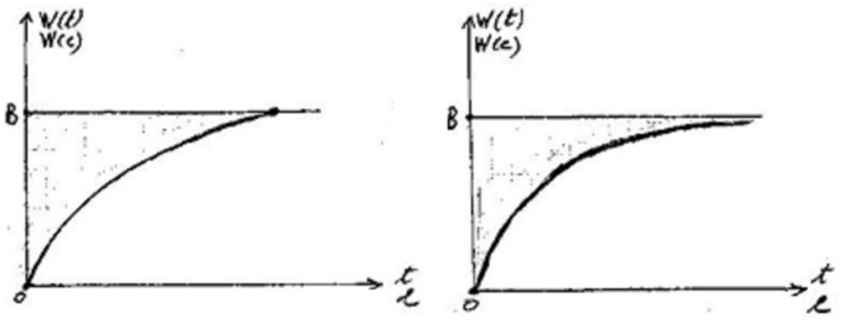
Au temps *t*, l'utilité TOTALE de la consommation sociale se note U(x) et la désutilité TOTALE du travail V(a). L'utilité MARGINALE de la consommation sociale vaut u(x) = dU(x)/dx et la désutilité MARGINALE du travail vaut v(a) = dV(a)/da. Le bien-être total au temps *t* vaut W = U(x) -V(a). Ramsey veut déterminer le taux d'épargne qui maximise la valeur cumulée de *W* sur tout l'intervalle de temps considéré.

W est une fonction de *c* ; en fait, la production ne dépend que de cette variable, *a* étant donné. *W* est donc également une fonction de *t*, puisque *c* est fonction de *t*. Le capital s'accroît à chaque période du montant non consommé. La relation entre *W* et *c* est au centre du modèle. Comme le montre le graphique 8.1, Ramsey estime que l'accumulation de *c* n'augmente pas indéfiniment *W*. Deux raisons expliquent conjointement l'existence d'un maximum que *W* ne transgressera pas :
- l'utilité marginale décroissante de la consommation u(x) : la production crée de moins en moins de satisfaction.

[1] Le modèle ne comporte que des données agrégées, y compris lorsqu'il s'agit d'utilité ou de désutilité.

- la productivité marginale décroissante du capital δf/dc : l'accumulation du capital augmente la production de moins en moins.

Graphique 8.1 : l'épargne optimale selon Ramsey



Le maximum de bien-être, Ramsey le nomme « *Bliss* » (béatitude). Notons-le par la lettre *B*. Deux cas sont possibles : soit une valeur finie de *c* permet d'atteindre W = B ; soit, *W* tendra asymptotiquement vers *B*. Dans le modèle, cette distinction est peu significative. Le but est évidemment d'atteindre *B*, mais épargner un maximum pour l'atteindre le plus rapidement possible n'est pas nécessairement optimal, car l'épargne élevée réduit l'utilité dont la société profite au début de la période. Augmenter l'épargne *dc/dt* au temps *t* produit un effet contradictoire sur la courbe *W* : à la hausse du fait de la production accrue ; à la baisse du fait de la consommation moindre.

La béatitude atteinte, le taux d'épargne optimum deviendra nul car (δf/δc).u(x) ne peut plus être positif. On ne peut pas dépasser l'optimum. Le modèle est dynamique en ce sens qu'il se préoccupe du chemin menant à l'optimum, mais l'optimum lui-même est conçu statiquement.

Notre problème consiste à atteindre *B* (ou l'atteindre quasiment) en un temps fini, tout en minimisant la surface hachurée sur le graphique[2], qui est finie, même dans le cas asymptotique. Les équations d'équilibre sont :

$$dc/dt + x = f(a,c) \qquad (8.1)$$
$$v(a) = (\delta f/\delta a).u(x) \qquad (8.2)$$
$$du(x(t))/dt = - (\delta f/\delta c).u(x(t)) \qquad (8.3)$$

L'équation (8.1) énonce simplement que la production-revenu égale la consommation plus l'investissement. L'équation (8.2) demande l'égalisation de la désutilité marginale du travail et de l'utilité supplémentaire générée par la dernière unité de travail, une condition d'optimisation classique. L'équation (8.3) implique que la consommation *x* augmente tant que la productivité marginale du capital et l'utilité marginale de la consommation sont positives, c'-à-d jusqu'à ce que la béatitude soit atteinte.

Quelques manipulations algébriques amènent à l'équation suivante ; au temps *t*, on a:

$$(dc/dt).u(x) = \{B - (U(x) - V(a))\} \qquad (8.4)$$

[2] Cette surface mesure la perte de satisfaction cumulée due à la non réalisation de la béatitude. Elle vaut :
$\int_0^\infty (B-U(x)+V(a))\, dt$

Nous avons donc notre règle : « rate of saving multiplied by marginal utility of consumption should always equal bliss minus actual rate of utility enjoyed »[3]. Ramsey insiste sur le fait étonnant que le taux d'intérêt ne joue aucun rôle dans la formule.

On peut constater que la règle de Ramsey met toutes les générations concernées sur le même pied, puisqu'aucun escompte ne vient pondérer les satisfactions plus reculées dans le futur. Il se refuse à considérer la satisfaction de la génération présente comme prioritaire et écrit à ce propos : « it is assumed that we do not discount later enjoyments in comparison with earlier ones, a practice which is ethically indefensible and arises merely from the weakness of the imagination »[4]. Le choix du non-escompte donnera lieu à un débat entre économistes dans les décennies suivantes.

Dans ce débat, la dernière contribution importante -décisive, pourrait-on dire- est celle de **Tjalling Koopmans** qui démontra qu'au-delà du débat éthique, le non-escompte des satisfactions futures est mathématiquement intenable. Il construit son raisonnement en trois phases :

1- Axiomatiser ce que serait l'attitude rationnelle d'un Etat appelé à prendre la décision relative au plan d'épargne.
2- Montrer qu'un fonction d'utilité[5] peut être déduite de ces axiomes, permettant de classer les plans d'épargne possibles selon ses préférences.
3- Montrer que cette fonction d'utilité escompte inévitablement les satisfactions futures, ce que Koopmans qualifie d'*impatience*.

L'intervalle de temps que ce modèle prend en considération est infini, ce qui en constitue une caractéristique essentielle. Le but est de définir la fonction $U = U[u(x_1),u(x_2),u(x_3)\dots]$ où x_1, x_2… sont les consommation des différentes périodes, où u(.) est l'utilité immédiate de ces consommations et où *U* est la fonction d'utilité intertemporelle qui nous intéresse.

Les principaux postulats de Koopmans sont :

- La fonction d'utilité doit avoir la propriété de *continuité*
- La fonction d'utilité est sensible à des avantages ou sacrifices immédiats et elle ne peut privilégier la concentration de la satisfaction en une période reculée.
- L'indépendance entre les périodes. Si l'Etat préfère la consommation x_1 suivie d'une séquence infinie X à la consommation x_1' suivie de cette même séquence X, il préférera nécessairement aussi x_1 suivi d'une séquence infinie X' à x_1' suivi de X'. Koopmans reconnaît que « one cannot claim a high degree of realism for such a postulate because there is no clear reason why complementarity of goods could not extend over more than one time period »[6].
- La *stationnarité* : on ne modifie pas la préférence entre deux plans d'épargne en les décalant tous deux d'une période vers le futur pour intercaler un même x_1 en première période.

[3] Ramsey [293] p. 547
[4] Ramsey [293] p. 543
[5] La démarche de Koopmans est à ce titre similaire à celle de von Neumann et Morgenstern vis-à-vis de l'*utilité attendue.* Comme il s'agit d'une fonction d'utilité ORDINALE, elle n'est unique qu'à une transformation linéaire près.
[6] Koopmans [1960] p. 292

Koopmans, après une démonstration mathématique complexe, arrive à la conclusion que moyennant quelques conditions supplémentaires[7], le principe d'impatience est bien sous-jacent dans la fonction *U*. A mon avis, la grande faiblesse de la démonstration est qu'elle repose sur un intervalle de temps infini.

L'intérêt de cette double analyse de Ramsey et de Koopmans est très théorique. Pratiquement, il est impossible pour un planificateur de baser ses décisions sur l'utilité des consommateurs, qui n'est pas mesurable, contrairement à la consommation proprement dite.

L'hypothèse de l'invariance de l'utilité ressentie sur de très longues périodes est irréaliste. On a critiqué à bon droit les comparaisons interpersonnelles d'utilité, mais le cas est plus grave lorsqu'il s'agit de générations qui connaissent des degrés d'opulence différents et qui ont donc une autre conception de ce qu'est « beaucoup » ou « peu ».

Il est peu probable qu'une économie déjà industrialisée au départ trouve un avantage à accumuler du capital pendant une aussi longue période (plusieurs générations selon Ramsey), en l'absence de progrès technique. Il ne faudra pas longtemps pour que le rapport capital sur travail connaisse la saturation. Dans la réalité économique, l'accumulation sert principalement à incorporer les innovations technologiques.

Même abstraction faite de l'infinité du temps envisagé, sa très longue durée rend l'exercice peu significatif. Le monde évolue vite, dans ses dimensions politique, internationale, culturelle, technologique, démographique, écologique… Et ces évolutions sont imprévisibles pour une large part. Vouloir déterminer le taux d'épargne optimal au-delà d'un terme de dix ans relève de la gageure. Ramsey et Koopmans ont négligé le facteur INCERTITUDE. La prise en compte de celui-ci impose une limite temporelle étroite à ce type d'analyse[8].

L'un des arguments de Koopmans en faveur de la période infinie est qu'au terme d'une période finie, il existe un stock de capital qui servira aux générations ultérieures et qu'il est difficile d'intégrer objectivement ce capital dans la fonction d'utilité de la consommation. Cette difficulté est bien réelle mais n'est-elle pas un beau problème pour un économiste ? Koopmans semble plus intéressé par les problèmes mathématiques.

*

8.2.5. La règle d'or et le retour de Ramsey

PHELPS ET LA REGLE D'OR

Au début des années 1960, quelques économistes, Allais, Robinson, Phelps et d'autres, découvrent et énoncent, indépendamment l'un de l'autre, un théorème que Phelps baptise *règle d'or de l'accumulation*, dans son article « The Golden Rule of

[7] Ces conditions mathématiques semblent peu significatives du point de vue économique.

[8] Peut-être cette incertitude est-elle la vraie justification de l'escompte du futur. Plus les événements sont lointains, plus ils sont incertains et plus leur prise en compte risque de dérégler les choix.

Accumulation ; A Fable for Growthmen » (1961), que nous allons résumer à présent. L'article est rédigé comme un conte.

Dans un pays imaginaire nommé SOLOVIA, les autorités se préoccupent de la croissance de leur économie. Le progrès technologique et l'expansion démographique étant perçus comme des données exogènes, la variable sur laquelle la politique peut influer se révèle être le *rapport capital sur travail*. Le gouvernement estima qu'il convenait de fixer un taux d'investissement constant d'année en année et lança un concours parmi les citoyens pour récompenser celui qui trouverait le taux d'épargne optimal. Ce fut un certain OIKO NOMOS qui remporta le prix.

Oiko formule les hypothèses suivantes :

- Solovia a toujours été, est et restera toujours dans un *âge d'or*.
- Le taux de croissance d'âge d'or *g* étant naturel, donc indépendant du taux d'accumulation, il faut une substituabilité parfaite entre les facteurs pour que le ratio capital sur produit (K/Y) s'adapte pour égaliser dK(t)/dt avec *g*, quelle que soit la valeur du taux d'épargne *s*.

Ecoutons les explications d'Oiko à la foule rassemblée : « Each generation in a boundless golden age of natural growth will prefer the same investment ratio, which is to say the same natural growth path. In deciding which growth path is best from its standpoint, a generation will look only at the amount of consumption which each path offers it"[9]. Après la démonstration de ce lemme, Oiko en arrive au théorème fondamental : « Along the optimal golden age path, under conditions of natural growth, the rate of investment is equal to the competitive rate of profits »[10]. C'est cette égalité qu'Oiko appelle la *règle d'or de l'accumulation*.

Dans un âge d'or gouverné par la règle d'or, chaque génération investit pour le compte des suivantes la proportion du revenu identique à celle que les générations précédentes ont investie pour son compte.

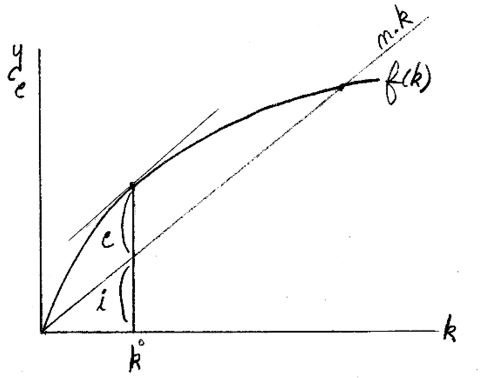
Que faire pour rejoindre le sentier de croissance correspondant à la règle d'or et comment s'assurer quelle est notre position vis-à-vis de ce sentier demanda la foule à Oiko. La solution est simple : au sentier de la règle d'or est associé un rapport K/Y unique. Si notre ratio est plus élevé que celui de la règle d'or, nous devons consommer plus ; dans le cas contraire, nous devons freiner notre consommation.

Attention au fait que l'objectif de la *règle d'or* consiste à maximiser non la production, mais la consommation. Accroître l'épargne peut stimuler la production, ce qui favorise la consommation, mais comme l'épargne est par définition de la non-consommation, il y a un juste équilibre à trouver. C'est ce qu'indique la figure 8.7. Y apparaissent la fonction de production intensive, qui indique la production par tête, ainsi que la droite d'investissement au taux naturel (n). L'écart entre les deux correspond évidemment à la consommation et il est maximum lorsque la tangente à f(k) est parallèle à la droite d'investissement, soit pour un rapport K/L valant k°.

---

[9] Phelps [279] p. 640

[10] Phelps [279] p. 641

Graphique 8.7 : la règle d'or de l'accumulation


Dans un article ultérieur (1965), Phelps corrigera deux erreurs du présent article. D'une part, il est possible de concevoir un équilibre de règle d'or dans un environnement à coefficients de production fixes, comme celui du modèle Harrod-Domar (isoquants à angle droit : pas de substitution entre les facteurs). D'autre part, l'éventail des fonctions de production compatibles avec la règle d'or doit être restreint : « a positive-investment GR path can exist only if technical progress can be described as purely 'labor augmenting' »[11].

Phelps ajoute : « But no proof of the 'optimality' of the GR path was given nor was any suggestion of its optimality seriously intended. Society need not confine itself to golden age paths (should they exist) nor aim to achieve golden age growth asymptotically". Mais il démontre quand-même que les sentiers de croissance qui accumulent durablement le capital au-delà de l'intensité capitalistique exigée par la règle d'or sont nécessairement dynamiquement inefficients. Il démontre encore qu'un sentier de croissance de règle d'or existe toujours, indépendamment de la substitution entre les facteurs, si les conditions suivantes sont réunies :

- Un input de travail est nécessaire à la production ;
- La main d'œuvre augmente à un taux constant ;
- La dépréciation du capital est à taux constant ;
- Le progrès technique est purement labor-augmenting (à un taux constant).

CASS, KOOPMANS ET RAMSEY

En 1965, **Cass** et **Koopmans** (séparément) combinent les analyses de Solow et de Phelps avec l'analyse plus ancienne de Ramsey. Comme chez Ramsey, l'optimum requiert la maximisation non de la production ou de la consommation, mais de l'utilité que cette dernière procure. Koopmans reprend la problématique de Ramsey telle qu'il l'avait adaptée, avec un escompte des satisfactions futures sur un intervalle de temps infini (cf. chapitre 8.1). Pour bien comprendre la problématique, il faut se mettre dans la peau d'un planificateur social qui a la responsabilité de déterminer le taux d'accumulation (et donc de croissance) pour l'éternité ; la question est : comment maximiser l'utilité intertemporelle générale en ne sacrifiant pas certaines générations au profit des autres. Les éléments du modèle sont :

[11] Phelps [280] p. 794

- Un bien unique (servant à la production et la consommation) est produit à partir des facteurs *K* et *L* dans le cadre d'une fonction de production *F* homogène de degré un. La technologie est constante.
- La main d'œuvre croit à un taux *n.* En temps continu, on a : $L_t = L_0.e^{nt}$. Contrairement à Cass qui complique son modèle avec la distinction entre les ménages qui consomment et les individus qui travaillent, pour Koopmans, un travailleur égale un consommateur. L(t) indique donc le nombre d'individus dont l'utilité au temps *t* doit être prise en compte.
- $u(c_t)$ est l'utilité de la consommation immédiate par tête ; on a : $c_t = C_t/L_t$ (répartition égalitaire au sein de chaque génération). La fonction u(.) est invariable dans le temps. Sa concavité stricte « implies that we attribute greater weight to the marginal unit of per capita consumption of a poor generation as compared with a rich one »[12]. Pour éviter qu'une génération tombe sous le seuil de subsistance, Koopmans impose que $u(c_t)$ tend vers $-\infty$ lorsque c_t tend vers zéro.
- Les satisfactions futures sont escomptées au taux ρ, pour la raison indiquée au chapitre 8.1. L'utilité immédiate est affectée d'un coefficient $e^{-\rho t}$.

Les chemins de croissance *atteignables* sont ceux pour lesquels se vérifie la condition :

$$c_t + \dot{k}_t = f(k_t) - n.k_t \qquad (8.29)$$

$c_t > 0, \qquad k_t > 0, \qquad k_0$ donné

L'équation (8.29) montre qu'une fraction de la production sert à offrir aux nouveaux travailleurs (de plus en plus nombreux) le même capital par tête que celui à la disposition des travailleurs en place.

Le critère d'optimalité est :

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}.\ u(c_t)\ dt \qquad (8.30)$$

Sont *éligibles*, les sentiers de croissance pour lesquels l'expression (8.30) a une valeur finie. Le sentier optimal maximise cette expression.

L'analyse de l'optimalité aboutit à la conclusion suivante :
1- Si ρ >0 : le sentier optimal tendra vers l'accumulation *k'* combinée avec la consommation *c'* : si sur la figure 8.7, on remplace la droite *nk* par (n+ρ)k, sa pente va augmenter et la tangence à f(k) lui sera parallèle pour une intensité capitalistique *k'* plus à gauche que k°. En conséquence, l'intensité capitalistique, la production et la consommation optimales seront inférieures à leur niveau de la règle d'or.
2- Si ρ = 0, la règle d'or tendra à être le sentier optimal et elle le sera précisément si la valeur initiale de *k* et k°.
3- Si ρ< 0, l'expression (8.30) n'a pas de maximum fini ; il n'y a pas de sentier de croissance optimal.

La prise en compte de l'accroissement de la population "immediately raises a new ethical question : this is whether one should maximize (…) an integral over discounted per capita utility $u(c_t)$ where $c_t = C_t/L_t$ is consumption per head or an integral over a discounted sum $L_t u(c_t)$ of individual utilities"[13]. Autrement dit, faut-il égaliser le poids des différentes générations ou le pondérer en proportion du nombre d'individus ? Dans

[12] Koopmans [195] p. 241.
[13] Koopmans [196] p. 6

ce dernier cas, qui a (modérément) la préférence de Koopmans, on pourrait considérer que $\rho = \rho' - n$, où ρ' est le taux d'impatience pur et n le taux d'accroissement de la population. Mais il faut alors imposer la condition peu intuitive que $\rho' > n$, faute de quoi, l'optimum n'existerait pas.