

9.4- LE RISQUE ET L'INCERTITUDE

Dans un premier temps, les économistes ont analysé les comportements des agents dans un environnement empreint de certitude. Il était présumé implicitement que chacun connaissait les contextes futurs et pouvait choisir ses actions en pleine connaissance de cause. L'incertitude n'avait droit qu'à quelques allusions. Inévitablement, l'analyse des comportements en situation incertaine était appelée à devenir un objet d'investigation.

Comme nous le verrons, la théorie de l'incertitude économique est traversée par une ligne de démarcation entre deux courants opposés : selon les mots d'Arrow, « those which use exclusively the language of probability distributions and those which call for some other principle, either to replace or to supplement »¹.

9.4.1. La dispute philosophique

KEYNES : LE DEGRE DE CROYANCE NON MESURABLE

Le « Treatise on Probabilities » (1921) est un traité qui aborde cette matière, non sous l'angle mathématique, mais psycho-logico-philosophique. Keynes souhaite conserver l'appellation « probabilité » pour tous les événements probables sans restrictions. Parmi ces probabilités, certaines sont susceptibles de supporter un traitement mathématique, d'autres non.

Soit une proposition dont nous ne savons pas avec certitude si elle est (ou se révélera) vraie ou fausse. L'individu qui souhaite se faire une opinion à ce sujet peut lui accorder un crédit plus ou moins élevé. C'est là que Keynes fonde sa théorie des probabilités. « I have spoken of probabilities as being concerned with degrees of rational belief »². Keynes insiste sur le caractère rationnel de la démarche. L'individu met en relation la proposition examinée et une connaissance préalable constituée de faits rendus plus ou moins certains par le fait qu'ils ont été intégrés par l'expérience. Cette optique exclut explicitement les croyances irrationnelles. Des individus distincts formeront éventuellement des probabilités différentes à propos d'une même proposition, parce que leur connaissance de base ne concorde généralement pas.

Puisque les probabilités sont un degré de croyance, la question se pose de savoir si et quand elles sont mesurables sur une échelle numérique. Keynes regrette que le calcul des probabilités ait reçu beaucoup plus d'attention que leur logique. A côté des probabilités qui peuvent être exprimées numériquement, il y a les autres ; parmi ces dernières, il n'est même pas toujours possible de les ranger par ordre de probabilité. C'est la nature de certaines propositions qui les rend inaptes à l'expression numérique, non pas le fait que l'esprit manque de l'intelligence nécessaire pour découvrir l'expression numérique. « It has always been agreed that a numerical measure can actually be obtained in those cases only in which a reduction to a set of exclusive and exhaustive equiprobable alternatives is practicable »³. Mais précisément, Keynes montre que la division en alternatives équiprobables, ce qu'il appelle le *principe d'indifférence*, est loin d'être toujours valide.

¹ Arrow [11] p. 410

² Keynes [187] p. 21

³ Keynes [187] p. 70

Keynes insiste également sur le fait que des propositions alternatives peuvent différer, non seulement par la balance entre les arguments favorables et défavorables qui affecte différemment leurs probabilités, mais également par la masse d'informations à laquelle le jugement fait appel ; de ce fait, différentes probabilités peuvent mériter des pondérations inégales.

Keynes critique la principale théorie rivale, la *théorie des probabilités par les fréquences*, largement répandue à son époque. Il cite l'un des tenants de cette théorie: « If the probability of a given event be correctly determined, he says, 'the event will on a long run of trials tend to recur with frequency proportional to their probability' »⁴. S'il est vrai que cette théorie trouve certaines applications valides, néanmoins un nombre important de jugements échappe aux conditions de son applicabilité. « Part of the plausibility of (this) theory is derived, I think, from a failure to recognise the narrow limits of its applicability »⁵.

RAMSEY: LE DEGRE DE CROYANCE MESURABLE

Dans son essai « Truth and Probability » (1926), Ramsey s'oppose frontalement à la conception keynésienne. Il s'attache à élaborer ce que Keynes considérerait comme impossible: « we must therefore try to develop a purely psychological method of measuring belief. It is not enough to measure probability; in order to apportion correctly our belief to the probability we must also be able to measure our belief »⁶. La solution qu'il propose considère le lien causal de nos croyances vers nos actes: « But when we seek to know what is the difference between believing more firmly and believing less firmly, we can no longer regard it as consisting in having more or less of certain observable feelings; at least, I cannot recognise any such feelings. The difference seems to me to lie in how far we should act on these beliefs »⁷.

Ramsey base son raisonnement sur un principe qu'il sait être rejeté par la psychologie moderne mais qui peut avoir un fondement dans le cas de comportements conscients du type de ceux qu'on retrouve dans la vie professionnelle : nous agissons de façon à réaliser nos désirs. En conséquence, nos comportements sont déterminés par ceux-ci et par nos opinions de probabilité : « if p is a proposition about which he is doubtful, any goods or bads for whose realisation p is in his view a necessary and sufficient condition enter into his calculations multiplied by the same fraction, which is called the 'degree of belief in p '. We thus define degree of belief in a way which presupposes the use of mathematical expectation »⁸. Ramsey va même jusqu'à établir une ébauche d'axiomatisation de ce qu'il considère comme un comportement rationnel. Il appelle ces règles « the logic of consistency in partial belief » ; elles sont une extension de la logique formelle. Les lois des probabilités sont directement liées à cette logique de cohérence. L'ensemble des croyances d'un individu forme un ensemble structuré : de telle croyance, on peut déduire telle autre mais pas telle troisième. L'esprit qui ne respecterait pas ces règles s'écarterait des chemins de la rationalité.

⁴ Keynes [187] p. 101

⁵ Keynes [187] p. 104

⁶ Ramsey [294] p. 166

⁷ Ramsey [294] p. 170

⁸ Ramsey [294] p. 175

La logique de cohérence ne suffit pas pour faire fonctionner l'esprit humain. L'observation et la mémoire sont également génératrices de croyances. « We want our beliefs to be consistent not merely with one another but also with the facts »⁹. L'observation de nouveaux faits fait réviser nos probabilités. Ici également, certains modes de pensée sont plus rigoureux que d'autres. Quelques bonnes pratiques peuvent être édictées, que Ramsey appelle « the logic of truth ». Ramsey recommande la pratique de l'*inférence inductive*, ce qui remet à l'avant-plan la *théorie des probabilités par la fréquence*. Notre esprit affecte des probabilités à des croyances en fonction de la fréquence observée¹⁰. L'inférence inductive n'est pas un outil parfait : il est impossible de prouver que la pratiquer aboutit à un résultat juste, mais s'en priver serait un handicap.

9.4.2. Knight : distinction entre le risque et l'incertitude

L'ouvrage « Risk, Uncertainty and Profit » de Knight (1921) est le premier ouvrage majeur d'économie politique consacré aux effets de l'incertitude sur la structure et le fonctionnement de l'économie. L'auteur regrette le peu d'intérêt que le sujet avait suscité auparavant.

Knight écrit: « The universal form of conscious behavior is thus action designed to change a future situation inferred from a present one »¹¹. Comme Keynes et Ramsey, Knight philosophe à propos des modalités de cette inférence. L'esprit réduit la part de hasard inexplicable en groupant les situations possibles en cas homogènes auxquels une probabilité peut être appliquée (classification). Suivant le type de contingence rencontrée, Knight distingue trois modes de formation des probabilités :

- Le raisonnement a priori de type logique et mathématique
- L'inférence statistique présument l'analogie entre le passé et le futur
- L'estimation, mode de pensée intuitif ; c'est une manière de contourner l'absence de base valide pour classer les occurrences.

Les décisions dans la sphère économique concernent généralement des situations très spécifiques ; les agents doivent alors recourir à l'estimation. Dans les affaires, l'intuition l'emporte sur le raisonnement. Certes, même dans le processus d'estimation, le businessman forme un jugement probabiliste et même un double jugement probabiliste, puisque sur base de son expérience, il forme également une opinion sur sa propre capacité de former des jugements. Toutefois, l'*estimation* n'a d'une probabilité que la FORME ; sa NATURE est différente : « it is a ratio, expressed by a proper fraction. But in fact, it appears to be meaningless and fatally misleading to speak of the probability, in an objective sense, that a judgement is correct »¹².

A ce stade, Knight établit une distinction qui est resté gravée dans l'histoire de la science économique, même s'il serait erroné de prétendre qu'elle fait l'objet d'un consensus : « To preserve the distinction which has been drawn in the last chapter between the measurable uncertainty and an unmeasurable one we may use the term '*risk*' to designate the former and the term '*uncertainty*' for the latter »¹³. C'est bien

⁹ Ramsey [294] p. 191

¹⁰ Ramsey reconnaît qu'on ne peut pas passer directement des fréquences observées à la probabilisation d'une croyance. Le lien n'est qu'indirect et pas toujours précis.

¹¹ Knight [189] § 7.8

¹² Knight [189] § 7.46

¹³ Knight [189] § 8.1

l'INCERTITUDE qui concentre l'intérêt de Knight. Selon lui, toutes les incertitudes économiques se résument au choix entre une rémunération inférieure plus sûre et une rémunération supérieure plus aléatoire.

Le comportement rationnel visera à réduire l'incertitude. Il y a deux moyens principaux :

- La **consolidation**, qui consiste à regrouper les occurrences possibles en classes. L'exemple le plus évident est celui des assurances.
- La **spécialisation**, par laquelle le pouvoir de décision est attribué en principal aux agents les plus aptes (intellectuellement et psychologiquement) à faire face à l'incertitude. Les différences individuelles en cette matière sont considérables.
- Knight y ajoute encore un moyen complémentaire : la **diffusion**. Réparti sur un grand nombre de têtes, le risque est plus supportable.

La *libre entreprise* est un système mis en place par la société pour réduire l'incertitude par la spécialisation ; il consiste à faire supporter l'incertitude par une classe particulière : les entrepreneurs. Son évolution historique réduit toujours plus l'incertitude par l'augmentation de la taille des entreprises (consolidation), le passage de l'entreprise individuelle à société d'associés puis la société d'actionnaires (consolidation dans le chef de l'investisseur qui diversifie son portefeuille et diffusion du risque entre les actionnaires).

Knight pense que la fonction d'entrepreneur doit son existence à la présence de l'incertitude. Sans celle-ci, il y aurait simplement des managers, dont l'activité, certes hautement qualifiée, relèverait de la routine. L'entrepreneur paie une rémunération contractuelle aux facteurs travail, capital et terre et s'octroie le résidu. Evidemment, il n'assume l'incertitude de son revenu que moyennant l'obtention du pouvoir de décision qu'il monopolise, à tout le moins en dernier ressort. Les facteurs de production lui délèguent le pouvoir, car ils sont délestés de l'incertitude¹⁴. Knight parle d'une « céphalisation » de l'entreprise. Toutes les parties y trouvent un avantage. « It is unquestionable that the entrepreneurs' activities effect an enormous saving to society, vastly increasing the efficiency of economic production »¹⁵. On ne pourrait surestimer l'importance de l'incertitude : Knight fait remonter à elle l'entreprise¹⁶ elle-même et le système salarial.

Dans la réalité économique complexe, peu de revenus sont purement résiduels ou purement contractuels ; la plupart associent les deux composantes, mais dans des proportions diverses. L'entrepreneur reçoit une rémunération contractuelle (salaire, rente ou intérêt), implicite ou officielle, pour ses tâches de routine. Parallèlement, les facteurs de production voient généralement leur revenu varier directement ou indirectement avec les affaires de l'entreprise. Généralement, il n'est pas possible de déterminer les montants respectifs avec précision.

¹⁴ Knight insiste sur la nécessité pour l'entrepreneur d'inspirer la confiance à ses partenaires pour que ceux-ci ressentent effectivement une réduction de l'incertitude. Cela se produit essentiellement par la contagion de la confiance que l'entrepreneur a en ses propres capacités.

¹⁵ Knight [189] § 9.24

¹⁶ Cette explication de l'entreprise sera contestée par les auteurs qui produiront des explications alternatives (cf. chapitre 9.8).

Le niveau du profit¹⁷ qui échoit à l'entrepreneur dépend de sa capacité de négociation-marchandage lorsqu'il acquiert les facteurs de production sur leurs marchés respectifs. Plus nombreux sont les entrepreneurs, moins ils sont en position de force sur ces marchés ; leur rémunération s'en ressentira. Knight pense que la complexité de la gestion augmente sensiblement avec la taille de l'entreprise ; les individus capables de gérer les grandes entreprises, peu nombreux, perçoivent donc une haute rétribution pour leurs services.

Le mot « entrepreneur » revient régulièrement dans cet exposé ; mais qui est au juste l'entrepreneur dans l'économie contemporaine ? Après avoir laissé planer une certaine ambiguïté, Knight développe enfin le sujet. Une fois n'est pas coutume, j'exposerai d'abord ma propre conception et je montrerai ensuite qu'elle est étayée par quelques citations de Knight.

L'entrepreneur est une fonction tellement particulière qu'on ne peut la considérer comme un facteur de production en soi. Ne peut occuper cette fonction que l'acteur qui œuvre déjà comme facteur de production, en tant que travailleur, capitaliste ou propriétaire terrien¹⁸. L'entrepreneur perçoit le profit résiduel, mais on ne peut pas considérer celui-ci comme la rémunération de la fonction entrepreneuriale. C'est heureux pour lui, car ce résidu peut être négatif aussi bien que positif. La science économique le fait d'ailleurs tendre vers zéro en concurrence parfaite¹⁹. C'est un des facteurs de production qui assume la fonction d'entrepreneur, le plus souvent le capital par actions. Ce qu'on appelle *profit résiduel* n'est alors que la modulation de l'intérêt perçu par ce capital par les résultats de l'entreprise. Cet intérêt inclut évidemment une prime de risque ; c'est ce dernier élément qui rémunère l'incertitude et non le profit résiduel lui-même qui n'est pas la rémunération mais motive la prime de risque. Voyons ce qu'en dit Knight :

« The apparent separation between control and risk taken turns out, as predicted, to be illusory. The paradox of the hired manager, which has caused endless confusion in the analysis of profit, arises from the failure to recognize the fundamental fact that in organized activity the crucial decision is the selection of men to make decisions, that any other sort of decision-making or exercise of judgment is automatically reduced to a routine function »²⁰.

« To whom is the responsibility ultimately transferred when the entire conduct and policy of a business are in the hands of a hired manager? The answer is obvious: to the owners of the productive services used in the business »²¹.

« It is impossible for entrepreneurship to be completely specialized or exist in a pure form (...) The natural result is a complicated division or diffusion of entrepreneurship, distributed in the typical modern business organization by a

¹⁷ Knight préconise l'usage du terme « profit pur » pour le profit résiduel, ce qui permet d'éviter la confusion avec la rémunération complète de l'entrepreneur que la littérature qualifie souvent de « profit ». Le *profit pur* se calcule par la déduction d'un intérêt, d'une rente et d'un salaire compétitifs fictifs, du profit.

¹⁸ Il peut éventuellement cumuler plusieurs de ces rôles.

¹⁹ Certes, la théorie prévoit un profit résiduel positif en concurrence imparfaite, mais même dans cette situation, la prévention de l'entrée de nouveaux concurrents peut l'annuler.

²⁰ Knight [189] § 10.11

²¹ Knight [189] § 10.14

hierarchy of security issues carrying every conceivable gradation and combination of rights to control and to freedom from uncertainty... »²².

« In most cases, it would not be fruitful to attempt an accurate separation of profit from interest (...) The entrepreneur must almost of necessity own some property and the owner of property used in a business can hardly be freed from all risk and responsibility »²³.

Knight lie ensuite cette analyse de l'entrepreneur avec ses considérations précédentes : c'est l'incertitude et non le risque qui produit le profit. « Profit arises out of the inherent, absolute unpredictability of things, out of the sheer brute fact that the results of human activity cannot be anticipated and then only in so far as even a probability calculation in regard to them is impossible and meaningless »²⁴.

Knight se montre sceptique à l'encontre de la thèse courante de l'*aversion pour le risque*. Le capitalisme jouit de l'avantage majeur que sa classe dominante est joueuse. Bien qu'ayant moins à perdre, les dirigeants d'une économie socialiste se montreraient plus conservateurs. Selon Knight, les entrepreneurs n'ont pas besoin du profit comme incitant à prendre des risques. Il suggère même qu'à l'échelle de l'économie globale, le profit pur pourrait se révéler négatif. Cet avis n'est étayé par aucun argument ni aucune donnée. Comme il le reconnaît lui-même, il s'agit simplement d'une impression générale.

9.4.3. Théorie de l'utilité espérée

Ramsey, dans l'essai analysé ci-dessus, a montré la voie à la conception de l'incertitude qui dominera l'économie néoclassique. Cette conception s'appuie sur deux idées :

- **Les probabilités subjectives** : dans la majorité des situations où une décision doit être prise, les conséquences n'apparaissent pas à l'individu assorties de probabilité objectives comme ce peut être le cas lors d'une loterie. En l'absence de probabilités objectives, l'agent construit intuitivement des probabilités sur lesquelles il basera ses choix.
- L'idée que les agents agissent de manière à maximiser l'espérance mathématique de leur utilité. C'est la **théorie de l'utilité espérée**. Ses racines remontent au XVIIIe siècle.

LE PARADOXE DE SAINT-PETERSBOURG

En 1713, le mathématicien suisse Daniel **Bernoulli** expose le problème paradoxal suivant : proposons un jeu de pile ou face non truqué. On procède au nombre de jets nécessaires jusqu'à ce que *face* apparaisse une première fois. Le gain du joueur vaut 2^n ducats où n est le nombre de jets nécessaires. Combien serions-nous prêts à payer pour participer à ce jeu ? Le paradoxe vient de ce que l'espérance mathématique de gain vaut l'infini, alors que personne ne paierait cher pour y participer. C'est son frère Nicolas qui avança l'explication en 1738. En fait, l'espérance mathématique du gain n'intervient pas dans le choix ; c'est l'espérance mathématique de l'utilité du gain. Or

²² Knight [189] § 10.16

²³ Knight [189] § 10.22

²⁴ Knight [189] § 10.33

celle-ci augmente moins que le gain. Ce disant, Nicolas Bernoulli est le premier précurseur de la théorie de l'*utilité marginale décroissante*.

VON NEUMANN ET MORGENSTERN

Dans l'ouvrage « Theory of Games and Economic Behavior » déjà mentionné au sous-chapitre 6.1.2, la *théorie de l'utilité espérée* ne fait l'objet que d'une quinzaine de pages qui sont une simple introduction aux développements qui suivent. Pourtant, ces pages eurent rapidement un retentissement considérable.

Les auteurs s'intéressent au système de préférence d'un individu, comme l'ont fait leurs prédécesseurs parétiens lorsqu'ils ont conçu les courbes d'indifférence. Simplement, ils élargissent les préférences à des situations comportant des alternatives stochastiques. Par exemple, le choix entre une possibilité *A* certaine et un événement qui sera soit *B* à une probabilité α , soit *C* à une probabilité $(1-\alpha)$. Les événements *B* et *C* doivent être mutuellement exclusifs. Est sous-jacente à ce système de préférence, une notion que les auteurs appellent « utilité » avec toutes les précautions d'usage. Dans l'exemple ci-dessus, si l'agent préfère la perspective *A* (d'utilité a) à la perspective [*B* ou *C*] (d'utilité b), cette préférence peut être notée $a > b^{25}$. Ceci ne signifie pas encore qu'il y a moyen de quantifier a et b , mais c'est justement la possibilité de cette quantification que les auteurs veulent démontrer.

Le point de départ du raisonnement est ce double élément :

$$a > b \quad (9.5-A)$$

$$\alpha.a + (1-\alpha).b \quad (9.5-B)$$

Ces deux expressions signifient respectivement la possibilité de hiérarchiser des utilités et la possibilité de les combiner avec des probabilités. Ce sont les seules véritables hypothèses du modèle.

Le but est de prouver qu'à chaque utilité a, b, \dots , on peut associer un nombre réel ρ qui est la valeur d'une fonction $v(a), v(b), \dots$ qui respecte la double condition (9.6) :

$$\text{si } a > b, \text{ alors } v(a) > v(b) \quad (9.6-A)^{26}$$

$$v(\alpha.a + (1-\alpha).b) = \alpha.v(a) + (1-\alpha).v(b) \quad (9.6-B)$$

Préalablement, les auteurs démontrent que si, pour un système de préférences, plusieurs fonctions respectent cette double condition, elles sont nécessairement liées entre elles par le fait qu'elles sont mutuellement des transformations linéaires. Autrement dit : pour ρ, ρ' respectant (9.6), on a $\rho' = k.\rho + 1$. Les auteurs considèrent qu'il s'agit là d'une relation suffisamment restrictive pour que les fonctions $v(\cdot)$ restent significatives²⁷ ; on en trouve régulièrement de semblables en physique, par exemple pour les températures.

Pour assurer les relations (9.6), il faut postuler certaines propriétés du système de préférences. Autrement dit, il faut établir une base axiomatique. « A choice of axioms

²⁵ Attention : a et b ne sont pas des gains mais des perspectives offertes à l'individu, appréciées sous l'angle de l'avantage qu'elles procurent. Les auteurs ne font jamais intervenir directement les gains dans leur modèle : la comparaison porte toujours sur les perspectives elles-mêmes.

²⁶ Le signe « > » a une signification différente dans $a > b$ (simple préférence) et dans $v(a) > v(b)$ (supériorité numérique).

²⁷ Sans l'intervention des probabilités α et $1-\alpha$, toute transformation monotone eût été acceptable.

is not a purely objective task (...) The axioms should not be too numerous, the system is to be as simple and transparent as possible, and each axiom should have an immediate intuitive meaning by which its appropriateness may be judged directly”²⁸.

Les axiomes choisis constituent évidemment le cœur de la démonstration.

- 1- Le système de préférences est complètement ordonné. Pour tout couple d'utilités a et b , on aura toujours entre elles $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.
- 2- Les préférences sont transitives : si $a > b$ et $b > c$, on aura nécessairement $a > c$.
- 3- $a > b$ implique $a > \alpha.a + (1-\alpha).b$, ce qui est justifié par le caractère mutuellement exclusif des événements
- 4- $a > b > c$ implique l'existence d'un α tel que $\alpha.a + (1-\alpha)c > b$. « This is a plausible continuity assumption »²⁹.
- 5- $\alpha.a + (1-\alpha).b = (1-\alpha).b + \alpha.a$
- 6- $\alpha.[\beta.a + (1 - \beta).b] + (1 - \alpha).b = \gamma.a + (1 - \gamma)b$, où $\gamma = \alpha.\beta$. Une application d'alternatives stochastiques successives (ici 2 étapes : α et β) peut toujours correspondre à une application unique (ici : $\gamma = \alpha.\beta$)

L'équation (9.6-B) signifie que la fonction d'utilité d'une perspective stochastique prend comme valeur l'espérance mathématique des utilités des événements possibles pondérées par leur probabilité. Une caractéristique de cette fonction est donc que la valeur qu'elle prend n'est pas influencée positivement ou négativement par l'attitude de l'individu face au risque. Les auteurs s'interrogent si on pourrait les accuser de construire un système visant à occulter l'attitude face au risque mais ils ne trouvent d'indice d'une telle culpabilité dans aucun de leurs axiomes.

Terminons avec quelques mises au point. D'abord, les auteurs estiment que leur modèle se marie mal avec les probabilités SUBJECTIVES ; ils le trouvent mieux assorti aux probabilités formées à partir des fréquences constatées sur le long terme. Cette affirmation est toutefois peu étayée. Ils rappellent également cette évidence que leur fonction d'utilité ne peut servir à des comparaisons ou des additions interpersonnelles. Enfin, ils reconnaissent que « we cannot avoid the assumption that all subjects of the economy under consideration are completely informed about the physical characteristics of the situation in which they operate and are able to perform all statistical, mathematical etc., operations which this knowledge makes possible »³⁰. Mais pensent-ils, leur théorie des jeux basée sur cette hypothèse explique valablement certains comportements qu'on attribuerait prima facie à l'information imparfaite ; cette dernière interprétation ne serait donc pas nécessairement la plus adéquate.

L'AXIOME D'INDEPENDANCE

A la fin des années quarante et au début des années cinquante, beaucoup d'auteurs s'emparèrent de la théorie de l'utilité espérée pour la critiquer, pour la défendre, pour la réinterpréter ou l'exposer avec d'autres formules mathématiques. Un colloque fut même tenu à Paris.

Parmi les auteurs qui réexposèrent cette théorie, **Samuelson** est l'un des partisans de ce qu'on a appelé l'*axiome d'indépendance*.

²⁸ Von Neumann & Morgenstern [377] p. 25

²⁹ Von Neumann & Morgenstern [377] p. 27

³⁰ Von Neumann & Morgenstern [377] p. 30

Dans son article « Probability, Utility and the Independence Axiom », Samuelson commence par définir :

- Une *situation de probabilité de revenu simple* : c'est une loterie qui rapporte des lots X_1, X_2, \dots, X_n , respectivement avec des probabilités mutuellement exclusives x_1, x_2, \dots, x_n (dont la somme vaut évidemment 1).
- Une *situation de probabilité de revenu composée* : c'est un ticket de loterie dont les lots sont eux-mêmes la participation à d'autres loteries. Par exemple : $[(X_1, X_2 ; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (X_1, X_3 ; \frac{1}{4} ; \frac{3}{4}) ; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ offre à deux chances sur trois le gain X_1 ou le gain X_2 à une chance sur deux ou à une chance sur trois le gain X_1 à une chance sur quatre ou le gain X_3 à trois chances sur quatre.
- Une *situation de probabilité de revenu associée* à une situation composée est la situation simple qu'on obtient en prenant tous les lots de toutes les loteries et en calculant leur probabilité en multipliant la probabilité de la loterie par celle du lot dans la loterie et en additionnant les probabilités ainsi obtenues dans toutes les loteries où le lot est présent. Dans l'exemple ci-dessus, la probabilité de X_1 est $(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} \times \frac{1}{4})$, celle de X_2 est $(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2})$ et celle de X_3 est $(\frac{1}{3} \times \frac{3}{4})$.

Pour spécifier un comportement rationnel face au risque, Samuelson estime pouvoir se satisfaire de ces deux axiomes :

- 1- Axiom I of Complete Ordering: All situations can be completely ordered and in terms of their associated prizes alone. (This ordering may be further assumed to be continuous in the probabilities x_1, x_2, \dots).
- 2- Axiom II (Strong Independence): If lottery ticket $(A)_1$ is (as good or) better than $(B)_1$, and lottery ticket $(A)_2$ is (as good or) better than $(B)_2$, then an even chance of getting $(A)_1$ or $(A)_2$ is (as good or) better than an even chance of getting $(B)_1$ or $(B)_2$ ³¹.

Comme nous l'avons vu aux titres III et IV, les relations de complémentarité et de substituabilité entre les biens affectent l'utilité du groupe de biens. Selon Samuelson, le principe d'indépendance, tout-à-fait illégitime en situation de certitude, devient raisonnable dans le cas stochastique et même indispensable à la construction de ce qu'il appelle « the Bernoulli-Savage theory of maximisation of expected utility ». Vu que, d'une part $(A)_1$ et $(B)_1$ sont mutuellement exclusifs et que, d'autre part $(A)_2$ et $(B)_2$ le sont aussi, on ne voit pas pourquoi le choix entre $(A)_1$ et $(B)_1$ pourrait être contaminé par celui entre $(A)_2$ et $(B)_2$.

Samuelson avait déjà démontré lors du colloque de Paris que ces deux axiomes sont nécessaire pour définir le comportement qui maximise la « Bernoulli expected cardinal-utility magnitude » : $x_1 \cdot u(X_1) + \dots + x_n \cdot u(X_n)$.

Dans leur article « The Expected-Utility Hypothesis and the Measurability of Utility » (1952), **Friedman et Savage** défendent ladite hypothèse voulant que dans des "choices involving risk (...) individual choose in such circumstances as if they were seeking to maximize the expected value of some quantity". Ils proposent de fonder ce principe sur un trio d'axiomes :

³¹ Samuelson [314] p. 672. D'autres auteurs comme Marschak ou Savage ont également donné leur définition de l'axiome d'indépendance. Il y a des nuances entre ces définitions, mais elles vont évidemment dans le même sens.

- 1- Le premier axiome correspond aux axiomes 1 et 2 de von Neumann et Morgenstern.
- 2- Si $\alpha.a + (1 - \alpha)c \leq b$, $\forall 0 \leq \alpha < 1$, alors $a \leq b$.
- 3- $\forall 0 < \alpha < 1$, $\alpha.a + (1 - \alpha)c \leq \alpha.b + (1 - \alpha)c$ n'est vrai que si $a \leq b$
 Les auteurs expliquent le sens de cet axiome avec l'exemple suivant. Si un médecin hésite entre plusieurs maladies pour établir son diagnostic, mais que le repos est le meilleur remède pour chacun d'eux, il peut prescrire ce remède, même sans diagnostic exact. En fait, il s'agit d'une forme d'axiome d'indépendance, puisqu'en combinant respectivement une perspective a et une perspective b avec une perspective c , on ne modifie pas la préférence entre elles.

LA COURBE D'UTILITE D'UN REVENU INCERTAIN

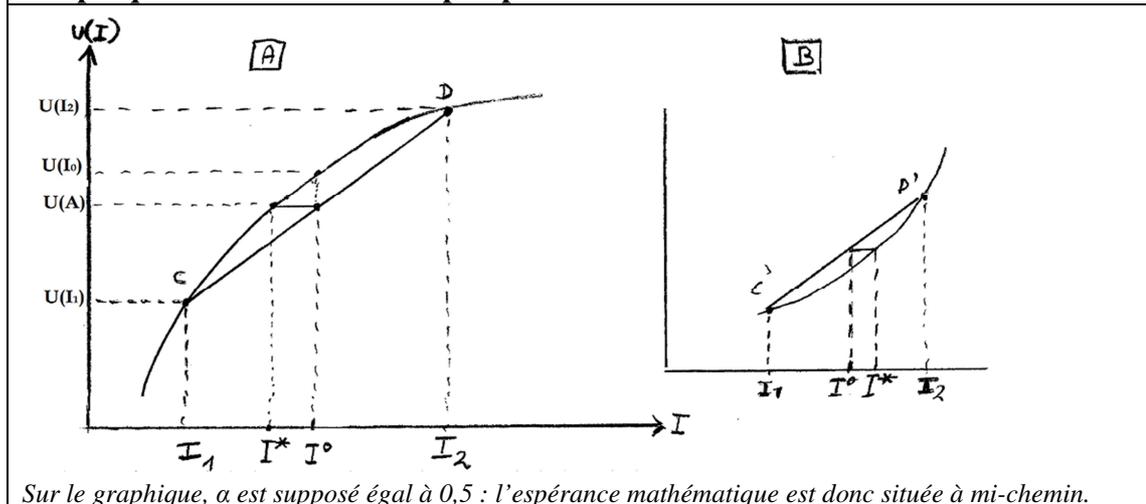
L'article « The Utility Analysis of Choices Involving Risk » (1948) de **Friedman et Savage** développe la théorie de l'utilité espérée dans une nouvelle direction : le lien entre le revenu et le comportement face au risque.

Pour effectuer leur analyse de la maximisation de l'utilité espérée, les auteurs construisent un outil graphique. L'objet est une fonction d'utilité : le revenu est placé en abscisse et l'utilité en ordonnée. Il est assez facile d'y placer un revenu fixe. Mais comment placer une perspective aléatoire comportant plusieurs événements possibles ? L'astuce des auteurs consiste à apporter les simplifications suivantes :

- Les alternatives offertes peuvent être toutes et entièrement converties en un revenu monétaire. Bien-sûr, dans la réalité, la manière dont un revenu s'acquiert peut influencer son attrait autant que son montant, mais la simplification fait avancer considérablement le modèle
- Ne sont considérées que des perspectives dont le choix comporte seulement deux options, dont les attraits ne sont pas égaux. Ici aussi, les auteurs sacrifient délibérément le réalisme à l'efficacité du modèle.

Voici les éléments et les variables du modèle :

- Le choix se pose entre une perspective incertaine A procurant un revenu I_1 à une probabilité α ou un revenu I_2 à une probabilité $(1-\alpha)$ et une perspective B d'un revenu certain I_0 .
- Compte tenu de la théorie de l'utilité espérée, on a $U(A) = \alpha.U(I_1) + (1-\alpha).U(I_2)$
- L'espérance mathématique du revenu $\alpha.I_1 + (1-\alpha).I_2$ est désignée par $I^o(A)$
- L'égalité $I^o = I_0$ signifie que le jeu est équilibré. Si le jeu est équilibré, la préférence de l'Agent pour A signifierait qu'il est attiré par le risque et la préférence pour B que le risque le rebute.
- I^* est le revenu certain d'un attrait égal à celui de la perspective A ; on a : $U(I^*) = U(A)$.

Graphique 9.4 : l'utilité d'une perspective aléatoire

Sur le graphique 9.4, les points C et D correspondent aux niveaux d'utilité des revenus I_1 et I_2 . Pour déterminer l'espérance mathématique de $U(A)$, on tire le segment CD correspondant à la corde de l'arc entre C et D . L'espérance mathématique se trouve sur cette corde, à un niveau dépendant de α . Sur la figure A, on constate que $U(I^\circ) > U(I^*)$. L'utilité de l'espérance de revenu est donc supérieure à l'espérance de l'utilité du revenu. Cette différence provient du fait que le risque lié à la perspective A réduit son utilité. Dans le cas où l'agent ressent de l'aversion pour le risque, la courbe est donc convexe. Le revenu I^* est inférieur au revenu I° qui correspond à un revenu certain égal à l'espérance mathématique du gain de la perspective A. L'écart entre les deux correspond à la prime que l'agent est prêt à payer pour être débarrassé du risque.

Si le revenu I_0 est supérieur à I^* , l'agent préférera la perspective B ; si $I^* > I_0$, il préférera la perspective A.

Si l'agent est attiré par le risque, la courbe d'utilité sera concave, comme sur la figure B. Pour un agent indifférent au risque, la fonction sera linéaire.

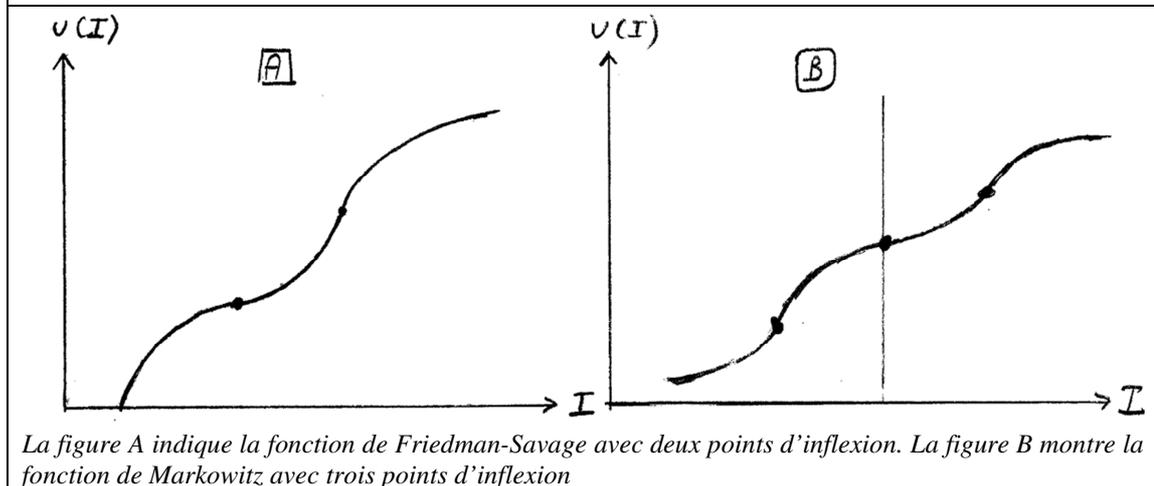
Les auteurs s'interrogent quelle est la forme de la fonction pour l'homme réel. Ils extraient d'une observation empirique très superficielle (sans sondages, sans statistiques) quelques caractéristiques sur la base desquelles des raisonnements parfois alambiqués mènent à une courbe divisée en 3 secteurs. Elle est d'abord convexe puis concave puis à nouveau convexe, comme sur la figure 9.5-A. Dans un premier temps, la courbe est censée se rapporter à un individu opérant des choix (loterie, assurance) à différents niveaux de revenu. Le principe de la courbe est ensuite étendu à une interprétation sociologique. Les trois secteurs correspondent aux classes sociales dans l'ordre croissant de revenu : la courbe indique alors l'attitude face au risque, caractéristique de chaque classe. « On this interpretation, increases in income that raise the relative position of the consumer unit in its own class yield diminishing marginal utility, while increases that shift it into a new class, that give it a new social and economic status, yield increasing marginal utility »³².

Les auteurs reconnaissent que leur courbe est discutable. Un approfondissement futur des connaissances empiriques permettra peut-être de l'affiner. Par exemple, n'y aurait-

³² Friedman & Savage [110] pp. 298-299

il pas plusieurs secteurs concaves ? Friedman et Savage avaient également dégagé de leur observation empirique qu'une prime plus élevée est nécessaire pour induire les agents à prendre un risque MOYEN plutôt qu'un PETIT risque ou un GROS risque. Ils reconnaissent que leur courbe ne reflète cette attitude que pour les agents de condition modeste.

Graphique 9.5 : la fonction d'utilité stochastique chez Friedman-Savage et Markowitz



Dans son article "The Utility of Wealth" (1952), **Markowitz** "argue(s) that the Friedman-Savage (F-S) hypothesis contradicts common observation in important respects"³³. Il pointe nombre de situations où des membres des trois classes sociales parieraient différemment de ce qu'affirme cette hypothèse. Notamment, l'idée que les gens très riches ou très pauvres ne parieraient jamais est contraire à l'observation.

Pour échafauder sa propre fonction d'utilité, Markowitz a interviewé son entourage appartenant à la classe moyenne, posant des questions du type « préférez-vous \$1 avec certitude ou une chance sur dix de recevoir \$10 ? ». Puis la même question avec \$10 et \$100, \$100 et \$1000... Et ensuite les mêmes questions avec des pertes. Les conclusions sont les suivantes. Concernant les gains en dessous d'un certain seuil, les gens prennent le risque, mais au-delà s'en tiennent à la perspective certaine. Concernant les pertes, en-dessous d'un seuil, on préfère les petites pertes sûres, mais au-delà, on tente la chance d'échapper à la perte malgré le risque d'en encourir une plus importante.

Markowitz en conclut que le courbe d'utilité doit avoir une forme semblable à celle de la figure 9.5-B : concave, puis convexe puis concave puis convexe. Il y a donc trois points d'inflexion et non deux. Le point d'inflexion central correspond au revenu actuel ou plus précisément ce que Markowitz appelle le *revenu habituel* afin que soit tenu compte d'éventuelles variations récentes et importantes de ce revenu. Markowitz pense que s'il devait interroger des riches, la courbe aurait la même forme mais les deux autres points d'inflexion seraient plus éloignés du revenu habituel ; pour des personnes de condition modeste, ils seraient plus proches. La courbe de Markowitz a encore deux autres caractéristiques :

³³ Markowitz [252] p. 152

- « Generally, people avoid symmetric bets »³⁴. La pente de la courbe est donc plus forte à gauche du *revenu habituel* qu'à droite.
- Pour éviter le paradoxe de Saint-Pétersbourg, la courbe est bornée par au-dessus et par en-dessous³⁵.

9.4.4. La critique d'Allais

Maurice Allais est en désaccord avec la théorie de Bernoulli elle-même et avec ses différentes déclinaisons que nous venons d'examiner. Il l'a combattue dans plusieurs articles, dont « Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque : Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Américaine » (1953).

Il commence par exposer les quatre éléments psychologiques essentiels pour analyser les comportements face au risque :

- Elément I : *la déformation psychologique des valeurs monétaires et la courbure de la satisfaction absolue*. Cet élément concorde avec le principe bernoullien mettant en avant la valeur psychologique des gains qui augmente moins que ceux-ci.
- Elément II : *la déformation psychologique des probabilités objectives*. Certains croient en leur bonne étoile alors que d'autres s'estiment poursuivis par la malchance. Seules importent les probabilités subjectives.
- Elément III : *la pondération suivant les probabilités des valeurs psychologiques et la considération des ESPERANCES MATHÉMATIQUES de la distribution des probabilités des valeurs monétaires*.
- Elément IV : *la prise en considération de la forme des distributions de probabilités des valeurs psychologiques et en particulier de leur DISPERSION*. Ce facteur a trait au plaisir ou au déplaisir procuré par le jeu en tant que tel. L'agent réticent au risque préférera les densités de probabilité à faible variance. Allais insiste tout particulièrement sur ce facteur qui a tendance à être négligé.

Une des difficultés est que les éléments I et IV sont conceptuellement distincts, mais pratiquement indissociables. C'est à la possibilité de grandes pertes et de grands gains que beaucoup d'agents sont particulièrement sensibles. Pour celui qui désire à tout prix une grosse somme, le jeu est parfois le seul moyen rationnel de se la procurer. Les éléments I à III ne rendent pas compte de cette réalité. « On ne saurait ainsi négliger la dispersion des valeurs psychologiques même dans une première approximation. C'est même à notre avis l'élément spécifique de la psychologie du risque »³⁶. Allais insiste également sur le fait que l'existence d'émotions positives ou négatives face au risque n'est en rien un signe d'irrationalité.

Allais formalise sa théorie par l'équation (9.7) :

$$s(V) = f(g_1, \dots, g_n, p_1, \dots, p_n) \quad (9.7)$$

³⁴ Markowitz [252] p. 154

³⁵ Cette remarque est importante. Il ne suffit pas de donner le premier rôle aux utilités plutôt qu'aux gains réels pour empêcher que l'espérance mathématique puisse tendre vers l'infini. On peut concevoir des jeux dont l'utilité espérée serait infinie pour un agent dont la fonction d'utilité serait non bornée (pour autant que cela soit possible).

³⁶ Allais [7] p. 512. On ne peut s'empêcher de dresser un parallèle avec la controverse du capital (chap. 5.3). Dans les deux cas, la théorie néoclassique tire des conclusions de la seule espérance mathématique d'une variable (la durée du processus de production ou l'utilité du gain). Dans les deux cas, elle est contestée par l'affirmation que la forme de la distribution (de l'application des facteurs primaires dans le temps ou la densité de probabilité des gains) importe également.

La fonction $s(\cdot)$ indique l'utilité d'une perspective ou d'un gain et V est une perspective aléatoire comportant des gains g_i selon des probabilités p_i . Allais propose également une deuxième équation dont la signification est identique mais qui convient mieux pour des variables continues. Considérons la variable γ qui correspond à la satisfaction des gains possibles. On a $\gamma = s(g)$. Sa fonction de densité de probabilité est $\Phi(\gamma)$. On a alors :

$$s(V) = h(\Phi(\gamma)) \quad (9.8)$$

Par contre, l'équation qui exprime la théorie de l'école américaine est :

$$B(V) = \sum_i p_i \cdot B(g_i) \quad (9.9)$$

$B(\cdot)$ est l'indicateur d'utilité de von Neumann et Morgenstern, correspondant à la fonction $v(\cdot)$ de l'équation (9.6). D'après Allais, pour ces auteurs, $B(\cdot)$ et $s(\cdot)$ coïncident, abstraction faite des transformations linéaires de $v(\cdot)$. Par contre, il estime ambiguë la position de Friedman, Savage et Samuelson. Leur version de la fonction $B(\cdot)$ semble être un amalgame des éléments I et IV. D'après Allais, sous la plume de von Neumann et Morgenstern, la formule (9.9) décrit le comportement de l'homme moyen, alors pour les autres, elle est le modèle du comportement rationnel.

REFUTATION DE LA FORMULE BERNOULLIENNE

Allais s'emploie à réfuter la formule (9.9). D'abord du point de vue théorique, en partant d'une définition abstraite de la *rationalité*. Selon lui, les seules implications de la rationalité sont au nombre de trois :

- un champ de choix ordonné
- le recours aux probabilités OBJECTIVES
- ce qu'il appelle l'*axiome de préférence absolue* disant que si pour toutes les éventualités, le gain de V_1 domine celui de V_2 , il faut préférer V_1 à V_2 .

Allais démontre mathématiquement (dans un autre article) qu'il est impossible de déduire l'équation (9.9) de ces trois postulats. Il démontre également que l'équation (9.9) est plus restrictive que l'équation (9.8). En fait, le formule bernoullienne est trop restrictive par rapport aux seules implications de la rationalité, ce qui est une forme d'irrationalité.

Un comportement très courant chez les entrepreneurs consiste à opérer un arbitrage entre le gain probable d'une opération et le risque de subir une grande perte. Ils ont alors un indicateur d'indifférence du type $S = f(M, q)$ où M est le gain probable et q la probabilité de cette perte. Pour conserver un niveau de satisfaction donné, il paraît rationnel que M doit augmenter beaucoup plus rapidement que q . Mais cette croissance plus que proportionnelle de M n'est pas compatible avec le caractère linéaire de la formule bernoullienne.

Allais s'attache également à réfuter l'*axiome d'indépendance*, notamment dans sa version de Samuelson, qu'il résume par l'équation :

$$\text{Si } P_1 < P_2, \text{ alors : } \alpha \cdot P_1 + (1-\alpha) \cdot P_3 < \alpha \cdot P_2 + (1-\alpha) \cdot P_3 \quad (9.10)$$

Il écrit : « Ce point de vue est en réalité inacceptable, car il suppose le premier tirage correspondant aux probabilités $[\alpha; (1-\alpha)]$ comme neutre, alors qu'il ne l'est pas, et il se place 'ex post' alors qu'il faut se placer 'ex ante' »³⁷. Allais imagine une situation où

³⁷ Allais [7] p. 520

P₂ et P₃ sont des gains certains alors que P₁ est un gain probable. Mêlé à P₃, P₂ perd le statut de gain certain qui faisait son attrait ; il a donc plus à perdre que P₁ de la combinaison avec P₃. Voici un exemple chiffré :

P₂ donne 100 millions certains, P₁ donne 500 millions à 98/100 ou rien à 2/100. Les personnes prudentes mais néanmoins rationnelles préféreront P₂ à P₁. Introduisons maintenant la perspective P₃ qui est la certitude d'un franc que l'on mêle à P₁ et P₂ avec une probabilité $1-\alpha = 99/100$. Ceux qui préféreraient P₂ à P₁ pourraient maintenant opter pour 500 millions à 0,98/100 plutôt que 100 millions à 1/100. L'axiome de Samuelson est mis en échec.

L'erreur a une double cause :

- Si on se place EX POST comme Samuelson, on élimine inconsciemment l'essence du risque que constitue la forme de la distribution.
- « Notre psychologie est telle que nous préférons plus de sécurité au voisinage de la certitude qu'au voisinage de grands risques... »³⁸.

9.4.5. L'incertitude dans la *Théorie Générale* de Keynes

La conception de l'incertitude dans la *Théorie Générale*, que nous avons déjà évoquée au sous-chapitre 5.1.1, est cohérente avec le *Traité des probabilités*. Keynes et Knight sont dans le même camp. L'essentiel des problèmes rencontrés par les agents économiques relève de l'incertitude qui n'est pas probabilisable³⁹.

Je me contenterai de citer un passage très connu de l'article que Keynes avait écrit en 1937 pour commenter la *Théorie générale* où il définit l'incertitude :

« The game of roulette is not subject, in this sense, to uncertainty (...) The sense in which I am using the term is that in which the prospect of a European war is uncertain, or the price of copper and the rate of interest twenty years hence, or the obsolescence of a new invention or the position of private wealth owners in the social system in 1970. About these matters there is no scientific basis on which to form any calculable probability whatever. We simply do not know »⁴⁰.

Dans son article « Is Probability Theory relevant for Uncertainty? A Post Keynesian Perspective » (1991), **Davidson** cite également ce passage de Keynes. Il rappelle deux comportements que la *Théorie Générale* prêtait aux agents désorientés par l'incertitude : l'« animal spirit » et le repli dans une position inactive comme la détention de liquidités. Ces comportements contredisent fréquemment les prédictions de la théorie de l'utilité espérée.

Un comportement régulièrement rencontré dans la vie économique réelle est la conclusion de *contrats monétaires* : des contrats pour une relativement longue période où les prix sont spécifiés à l'origine et en unités monétaires. A priori il n'est pas rationnel de se corseter dans un prix dont on n'est pas sûr qu'il conviendra encore à plus lointaine échéance. Selon Davidson, il s'agit d'une réponse à la « true uncertainty ». Les contrats monétaires permettent aux agents de planifier leur trésorerie

³⁸ Allais [7] p. 539

³⁹ Attention à la terminologie utilisée par les auteurs qui peut susciter des équivoques intempestives : le *Traité* de Keynes parle de probabilités qui ne peuvent pas être traitées mathématiquement ; l'objet est évidemment identique à l'incertitude dont Knight dit qu'elle ne peut pas être traitée par les probabilités.

⁴⁰ Keynes [183] p. 214

de façon à ne pas tomber en illiquidité, une situation très pénible pouvant avoir des suites judiciaires. La peur de l'illiquidité les pousse à détenir une réserve de monnaie, incompatible avec la maximisation de l'utilité espérée. « A shortage of money can hold up the expansion of real output, despite of expected profits »⁴¹. La théorie néoclassique voit l'épargne comme un ajustement intertemporel des flux de dépenses. La thésaurisation pour fuir l'incertitude n'entre pas dans ce schéma.

N'étant pas fondés sur un calcul économique rationnel, parfois impossible, l'*animal spirit* et la *préférence pour la liquidité* peuvent aboutir à du chômage. Nul besoin de rigidité des salaires, d'information asymétrique... pour obtenir ce résultat. Il suffit de renoncer aux probabilités.

*

Pour conclure ce chapitre sur l'incertitude, on peut émettre l'hypothèse que si la variance des valeurs psychologiques des revenus possibles est inférieure à certain seuil, les comportements s'approcheront de la maximisation de l'utilité espérée, mais qu'au-dessus de ce seuil, les agents adopteront les comportements keynésiens.

⁴¹ Davidson [68] p. 139