6.3- EMERGENCE DE LA THEORIE ACTUELLE DE L'EQUILIBRE GENERAL

6.3.1. Progrès mathématiques et la « commission Cowles »

Dans les années trente est créée aux Etats-Unis la « Commission Cowles »[1] qui a pour objectif de promouvoir l'économie mathématique. Elle rassemble de nombreux économistes, dont beaucoup d'Européens (notamment ceux du Colloque viennois), qui franchissent l'Atlantique devant l'avance nazie. Les travaux de Wald et von Neumann sont le point de départ de la réflexion. Des congrès sont organisés. Les progrès dans l'économie néo-walrassienne ne sont plus le fruit d'initiatives isolées mais le résultat d'une activité coordonnée.

L'économie néowalrassienne entre dans une nouvelle étape, qui, ne révise pas seulement la démonstration walrassienne de l'existence de l'équilibre général mais englobe la problématique parétienne de l'optimum du consommateur, de celui du consommateur et du lien entre équilibre et optimum. Comme celle de Walras, les démonstrations néo-parétiennes comportaient des imperfections :

1- « It is obvious to everyday observation that for each individual there are some (indeed many) commodities of which he consumes nothing. Similarly, for every firm, there are some commodities which are neither inputs to nor inputs of it. But then, the argument that the marginal rate of substitution must equal the price ratio for each individual breaks down. »[2].
2- La fonction de production doit être différentiable, ce qui n'est pas toujours le cas dans la réalité, notamment avec les coefficients fixes. Lorsque les isoquantes comportent des « coins », une infinité de droites (de prix) peuvent être tangentes au coin : il y aurait indétermination de l'équilibre.
3- Le modèle parétien ignore les produits qui servent comme inputs pour produire d'autres produits.

Pour résoudre ces problèmes, l'économie néo-walrassienne s'est trouvée de nouveaux outils mathématiques mais la perspective économique de l'école de Lausanne demeure. C'est l'outil qui change, pas la théorie elle-même.

CONVEXITE ET THEORIE DU PRODUCTEUR

La nouvelle théorie de la production fut initiée principalement par Tjalling **Koopmans** qui quitta sa Hollande natale pendant la guerre pour rejoindre la commission Cowles dont il devint rapidement le président.

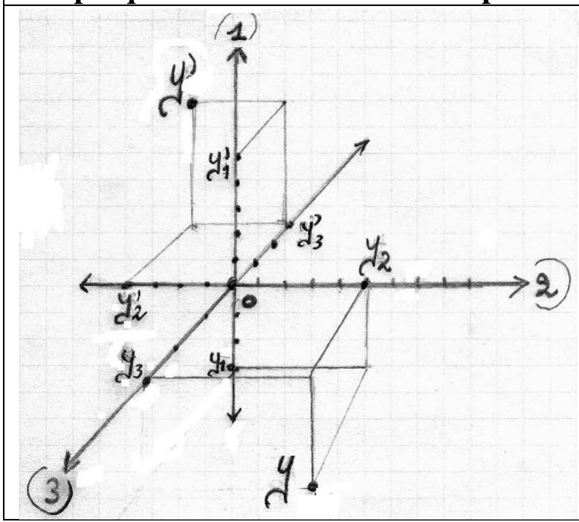
Soit une économie comportant l biens ; Koopmans reprend de von Neumann le concept d'*activité*, mais le formalise différemment. Les différentes activités de production réelles ou potentielles sont représentées par des points dans l'ensemble vectoriel à l dimensions. Un point dans l'espace vectoriel se caractérise par des coordonnées qui correspondent à un nombre réel sur chacun des l axes. Considérons que ces coordonnées sur les axes représentent les quantités physiques des biens, qui interviennent dans l'activité productive (en tonnes, mètres, unités diverses).

[1] D'*Alfred Cowles*, homme d'affaire à l'origine de sa création
[2] Arrow [15] p. 259

Conventionnellement, Koopmans représente cette quantité par un nombre négatif pour les inputs et par un nombre positif pour les outputs. Par exemple, l'activité y^a représentée par le vecteur (-1,0,-4,0,0,3,1,-9) est celle où on produit trois unités du bien six et une unité du bien sept à partir d'une unité du bien un plus quatre unités du bien trois plus neuf unités du bien huit ; les biens deux, quatre et cinq n'interviennent pas dans cette activité.

La représentation graphique est évidemment limitée à la production faisant intervenir un maximum de trois biens. Le graphique 6.2 nous montre un ensemble de deux activités : d'une part, **y** qui produit 5 unités de (2) et 3 unités de (3) à partir de 3 unités de (1) et d'autre part, **y'** qui produit 5 unités de (1) à partir de 3 unités de (3) et 4 unités de (2).

Graphique 6.2 : activités dans l'espace vectoriel



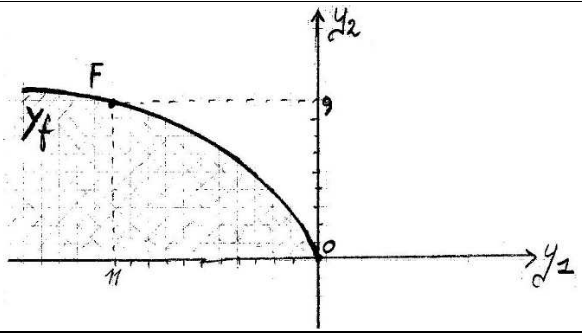
La représentation des activités par des vecteurs a l'avantage de mettre à disposition de l'économiste les ressources du calcul vectoriel, mais la lecture du présent chapitre ne nécessite presque aucune connaissance dans ce domaine. Les mathématiciens distinguent les SCALAIRES, c'est-à-dire les nombres et les VECTEURS, qui sont multidimensionnels. Le concept de vecteur inclut celui d'une direction, puisque les coordonnées du vecteur déterminent une position par rapport à l'origine (le zéro sur chaque axe). L'origine représente l'absence de production et l'éloignement d'un point par rapport à celle-ci reflète l'importance des flux que la production met en jeu. Si deux vecteurs distincts ont la même direction, ils représentent des activités où les biens entrent et sortent en proportion identique mais avec une amplitude différente.

Je me conformerai à une pratique courante consistant à distinguer les vecteurs des scalaires en les désignant par des lettres notées en caractère gras. La lettre minuscule **y** désigne généralement les activités. Les activités peuvent être définies au niveau de la firme ou de l'économie globale. L'indice *f* contenu dans $\mathbf{y}_\mathbf{f}$ stipule qu'on a affaire à une activité de la firme *f*. L'absence d'indice signifie qu'on a affaire à des activités propres à l'économie entière. Le vecteur relatif à l'économie globale a, comme éléments, des quantités produites qui sont pour chaque bien la somme des éléments correspondants des vecteurs des entreprises.

Ce n'est pas la totalité de l'espace vectoriel ainsi défini qui nous intéresse. Une activité produisant un kilo de chocolat à partir de 3 mètres de tissus et un baril de pétrole est évidemment impossible. Nous allons donc constituer dans l'espace vectoriel un sous-ensemble : l'ensemble des *activités possibles*, c'est-à-dire les activités qui sont technologiquement réalisables[3]. On utilise la lettre majuscule Y pour désigner l'ensemble des activités possibles. Un ensemble comme Y ou Y_f est une espèce de nuage dans l'espace vectoriel, qui enveloppe l'origine. La forme du nuage n'est pas aléatoire. Plus élevés sont les inputs, plus élevés tendront à être les outputs. Grâce à cette relation, on peut supposer que la forme du nuage ne sera pas trop irrégulière.

Pour examiner plus en détail l'ensemble Y ou Y_f, simplifions la situation pour avoir un graphique en deux dimensions : les activités ont un input y_1 pour un output y_2, comme sur le graphique 6.3. Supposons que Y_f soit la surface hachurée. Pour chaque valeur de l'input, l'output peut prendre les diverses valeurs comprises entre l'abscisse et la courbe *F*. Les points sur cette courbe indiquent la production maximale pour un input donné ; par exemple, elle vaut 9 lorsque l'input vaut 11. On appelle *fonction d'efficience* (F), l'ensemble des points de Y_f où la production est maximale. Elle dépend de critères technologiques. Elle constitue la frontière supérieure de l'ensemble Y_f. Normalement, la firme, motivée par la recherche du profit, devrait ignorer les activités de Y_f qui ne figurent pas sur la fonction d'efficience.

Graphique 6.3 : la frontière d'efficience



L'origine (output et input nuls) fait partie de Y_f car elle est évidemment faisable : elle se trouve sur la frontière d'efficience, car sans input, l'output maximal est nul.

L'une des caractéristiques les plus importantes, que peut avoir un ensemble comme Y_f, est la *convexité*. Prenons une paire de points (de vecteurs) quelconque de l'ensemble ; celui-ci est dit *convexe* si tous les points de la droite qui les relie font aussi partie de cet ensemble. Par exemple, l'ensemble comporte notamment l'activité **y** qui tire 20 produits de 10 heures de travail plus 4 tonnes de matière ainsi que l'activité **y'** qui tire 18 produits de 12 heures de travail et 3 tonnes de matières. Dans ce cas , l'ensemle Y_f ne sera convexe que s'il comporte également l'activité **y°** qui tire 18,8 produits de 11h20' de travail et 3,4 tonnes de matière. Mathématiquement, la convexité s'exprime ainsi :

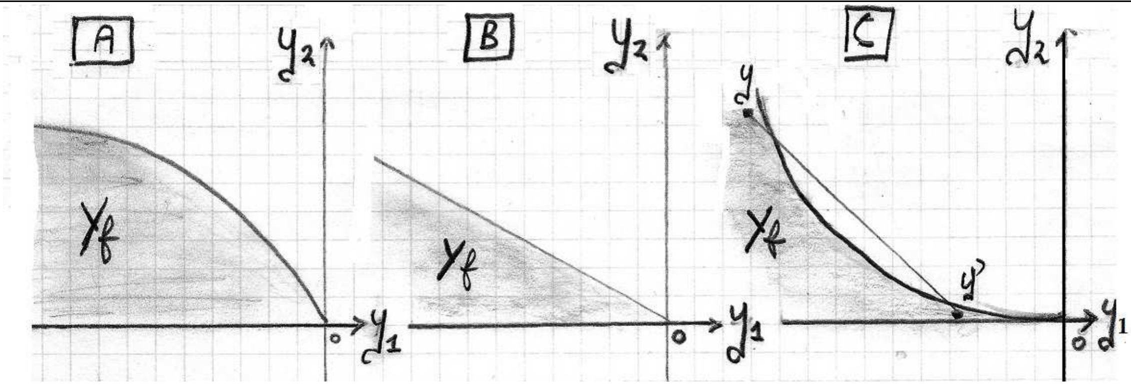
$$\text{Si } \mathbf{y} \text{ et } \mathbf{y'} \in Y_f \text{ et } 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ alors } [\lambda.\mathbf{y} + (1-\lambda).\mathbf{y'}] \in Y_f \qquad (6.18)$$

[3] Les économistes font parfois la distinction entre les activités POSSIBLES et les activités FAISABLES qui, outre le fait d'être possibles, ont une consommation des inputs qui n'excède pas la disponibilité (principalement pour les facteurs primaires).

Une activité dont certains inputs ou outputs sont indivisibles est également indivisible. Si l'activité **y** est indivisible, toutes les activités $\lambda.\mathbf{y}$ où $0 \leq \lambda \leq 1$ ne sont pas faisables. Il s'ensuit que des activités indivisibles rendent l'ensemble non convexe.

Le graphique 6.4 montre trois ensembles Y_f dont la frontière d'efficience est respectivement concave, droite et convexe. On constate que les deux premiers ensembles sont convexes et le troisième non[4].

Graphique 6.4 : la convexité des ensembles de production faisable



Sur la figure C, Y_f n'est pas convexe, car tous les points du segment entre y et y' ne lui appartiennent pas.

La forme de la frontière d'efficience révèle le type de rendements d'échelles : à gauche, l'output croît moins vite que l'input : ce sont les rendements décroissants ; au milieu les rendements sont constants et à droite croissants. L'ensemble Y_f ne sera convexe que si les rendements ne sont pas croissants.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les quantités physiques. Introduisons maintenant les prix et les valeurs. Tout comme nous avons défini une infinité de vecteurs **y** dans l'espace à *l* dimensions, nous pouvons définir des vecteurs **p** dans ce même espace à *l* dimensions qui sont chacun une combinaison des prix des différents biens. Ce sont les prix relatifs qui nous intéressent ; dans un exemple à trois biens, les vecteurs de prix (4,12,5) et (8,24,10) font double emploi. Pour éliminer les vecteurs qui répètent un vecteur déjà connu, une solution fréquente consiste à ne retenir que les vecteurs de prix dont la somme a une valeur déterminée, par exemple l'unité. Seuls les vecteurs ne comportant pas de prix négatifs et au moins un prix positif sont économiquement significatifs.

Dans un exemple à trois biens (1,2 et 3) dont les prix et les quantités sont respectivement p_1 p_2 p_3 et y_1 y_2 y_3, le produit vectoriel $\mathbf{p.y}$ égale $p_1.y_1 + p_2.y_2 + p_3.y_3$. Le produit de deux vecteurs donne un scalaire et non un vecteur. Comme y_i est positif pour l'output et négatif pour l'input, le résultat de ce produit vectoriel n'est rien d'autre que le profit de la firme pour les prix considérés. Nous le noterons par la lettre π.

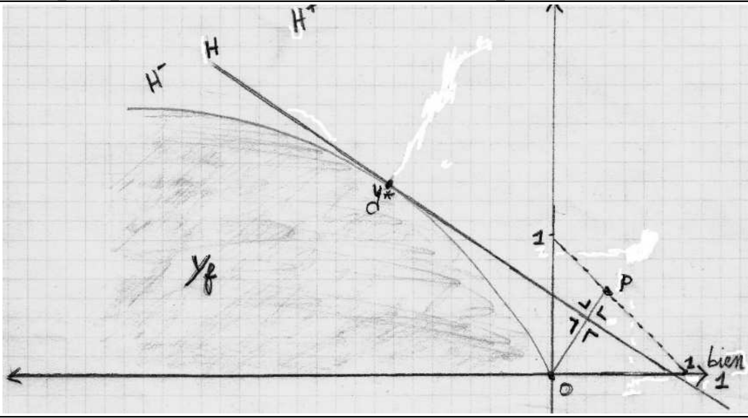
Voyons la figure 6.5. Le vecteur **p** (normé à 1) est dans le cadran positif. Il se fait que les vecteurs **y** qui multipliés par **p** donnent une même valeur de π forment ensemble une droite perpendiculaire au vecteur **p**. Chaque valeur de π définit donc une telle

[4] Attention au piège terminologique : l'ensemble convexe a une frontière d'efficience concave.

droite et ces droites sont parallèles entre elles pour un même vecteur **p**. Plus π est élevé, plus la droite est située vers le nord-est.

En concurrence parfaite, la firme considère le prix comme une donnée et s'y adapte en choisissant le vecteur **y** qui maximise son profit **p.y**. La question est donc de savoir s'il existe dans Y_f un vecteur **y*** qui a cette propriété.

Graphique 6.5 : la maximisation du profit



Introduisons la notion d'*hyperplan*. Dans l'espace des réels à *l* dimensions, un hyperplan est un ensemble de points **h** linéaire (**p.h** = c). L'hyperplan a une dimension de moins que son espace et il coupe celui-ci en deux parties : celle où **p.h** ≤ c (notée H^-) et celle où **p.h** ≥ c (notée H^+). Dans l'espace à deux dimensions du graphique 6.5, la droite *H* est un hyperplan. Les droites de profit dont il est question ci-dessus sont des hyperplans dans l'espace à 2 dimensions.

Un théorème, celui de Minkowski, dit ceci : soit un ensemble convexe *Y* dans R^l et un point **y** dans *Y*. Si et seulement si **y** n'est pas intérieur à *Y* (autrement dit s'il est sur la frontière d'efficience), il existe un hyperplan *H* passant par **y** et laissant *Y* tout entier d'un même côté.

L'hyperplan *H* relie les points pour lesquels le profit égale une valeur π*, lorsque le vecteur de prix (non nul) est **p**. Au nord-est, le profit est supérieur à π* et au sud-ouest, il est inférieur. Le point **y*** sur la frontière d'efficience est un point de profit maximum puisque les points de Y_f qui ne sont pas sur l'hyperplan rapportent nécessairement un profit inférieur. Ceux qui pourraient rapporter plus ne sont pas faisables.

L'application du théorème de Minkowski à notre problème implique donc l'existence d'une activité maximisant le profit pour un vecteur de prix non nul, pour autant que Y_f soit convexe. Il ressort à l'évidence du graphique 6.4-C que si les rendements d'échelle sont croissants, il n'y a pas de plan de production, maximisant le profit. Mais la convexité ne suffit pas ; si les rendements d'échelle sont constants, la maximisation du profit consiste à produire toujours plus. Ce n'est donc que si les rendements d'échelle sont décroissants que la firme peut maximiser son profit.

Tout comme les scalaires, les vecteurs peuvent entrer comme variable indépendante ou comme variable dépendante dans une fonction. Prenons le cas des vecteurs de prix **p**, pour lesquels la maximisation du profit est déterminée. On peut considérer que les vecteurs **y*** qui maximisent le profit sont une fonction **y(p)**. Le profit correspondant, π (qui est un scalaire), est également une fonction de **p** : c'est la « fonction de profit », notée π(**p**). La fonction **y(p)** peut être considérée comme la fonction d'offre de la firme (une offre élargie toutefois, car elle inclut la demande des inputs). L'offre résulte d'un comportement optimisateur ; la fonction d'offre n'est définie que si un plan optimum peut l'être, c'est-à-dire si les rendements sont décroissants. La fonction **y(p)** est alors continue.

CONVEXITE ET OPTIMUM DU CONSOMMATEUR

La manière d'aborder la consommation est similaire, mais le problème diffère légèrement. Le consommateur doit lui aussi choisir une combinaison de biens représentée par un vecteur, qui est noté **x**. Le travail fait partie des *l* biens. Les biens offerts, et le travail en est un, viennent en négatif. Dans l'espace euclidien à *l* dimension, on peut délimiter l'ensemble *X* des consommations faisables en éliminant celles qui n'apportent pas le minimum vital et celles qui offrent un travail au-delà des limites physiologiques. Alors que l'ensemble des productions faisables avait sa frontière vers le haut, celui des consommations faisables est borné vers le bas. L'ensemble *X* est présumé convexe.

Les consommateurs disposent souvent d'une allocation initiale (épargne passée, héritages…). Soit **e** le vecteur à *l* dimensions de cette allocation initiale.

Les consommateurs sont soumis à une contrainte budgétaire, qui les empêche de dépenser plus que leur revenu en ce compris l'allocation initiale. La contrainte de revenu, qui délimite les consommations payables, dépend de l'allocation initiale et du vecteur de prix. On peut caractériser ainsi les vecteurs de consommation, satisfaisant à la contrainte budgétaire :

$$\{\mathbf{x} \in \mathrm{X} \mid \mathbf{p.x} \leq \mathbf{p.e}\} \qquad (6.19)$$

Le travail venant en négatif dans le vecteur **x**, les revenus du travail viennent en négatif dans le produit **p.x** ; il est donc possible que **p.x** soit plus petit que **p.e** même lorsque ce dernier est nul.

Dans le cas de la production, c'était la technologie qui délimitait les plans de production faisables. Compte tenu de la technologie, la maximisation du profit était purement algébrique et objective. Pour la consommation, nous devons introduire une notion supplémentaire, de nature subjective : la préférence du consommateur. Le consommateur individuel peut toujours comparer deux vecteurs de consommation $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$ et le résultat sera nécessairement une de ces trois possibilités : $\mathbf{x_1}$ est préféré à $\mathbf{x_2}$; il lui est indifférent ou bien $\mathbf{x_2}$ lui est préféré.

Mathématiquement, il y a deux manières de présenter la préférence du consommateur. La première consiste à imposer un *préordre* dans l'ensemble *X*. Les différents composants de *X* sont classés en une série de « surfaces d'indifférences ».

Les économistes attribuent généralement diverses propriétés au système de préférence, dont les deux principales sont :

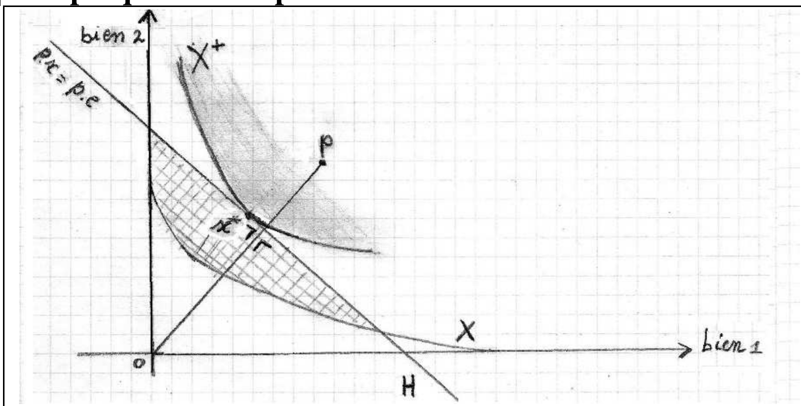
- la <u>*non-satiété*</u> : pour tout vecteur de consommation, il est possible d'en trouver un qui lui est préféré. La satiété peut être atteinte pour un ou quelques biens mais pas pour tous les biens ensemble
- la <u>convexité</u> : si $\mathbf{x_1} \succcurlyeq \mathbf{x_2}$[5], alors, $\forall$ $0< \lambda< 1$, on a : $[\lambda.\mathbf{x_1} + (1\text{-}\lambda)].\mathbf{x_2} \succcurlyeq \mathbf{x_2}$. Si $\mathbf{x_1}$ est préféré à $\mathbf{x_2}$, une combinaison des deux sera également préférée. Il ne faut pas confondre la convexité des préférences avec la convexité de l'ensemble *X* mentionnée ci-avant.

L'autre manière de représenter les préférences est de faire appel à une <u>*fonction d'utilité*</u>, comme suite aux travaux de von Neumann et Morgenstern (cf. supra). A chaque vecteur **x**, on fait correspondre une valeur réelle u(**x**) telle que cette valeur est nécessairement plus élevée pour un vecteur de bien préféré et égale lorsque le consommateur est indifférent entre deux consommations. L'existence d'une telle fonction a été démontrée mathématiquement, moyennant quelques conditions légères que doit satisfaire le système de préférence, principalement la continuité.

La fonction d'utilité est continue. La convexité des préférences correspond à la convexité des courbes d'indifférences, bien connue. La fonction d'utilité correspond à la colline de plaisir dans sa dimension « hauteur » ; elle est concave lorsque les courbes d'indifférences sont convexes[6].

Le graphique 6.6 montre l'optimum du consommateur. La contrainte budgétaire définit un hyperplan (orthogonal par rapport au vecteur de prix). Le consommateur ne peut se payer que les vecteurs de consommation de *X* qui ne sont pas en dessus de cette contrainte (au nord-est). Le vecteur **x*** est optimal car il est situé sur cet hyperplan et atteint la courbe d'indifférence la plus élevée. L'ensemble des points apportant une utilité strictement supérieure à celle de **x*** (noté X^+) est situé entièrement du côté inaccessible de la contrainte budgétaire.

Graphique 6.6 : l'optimum du consommateur



La surface grillagée est celle qui à la fois respecte la contrainte budgétaire et fait partie de X. La surface ombrée représente X^+ ; elle est strictement au-dessus de la courbe d'indifférence passant par ***x****.

Il est démontré que si **x*** est le vecteur préféré parmi ceux qui respectent la contrainte budgétaire, alors, **x*** minimise la dépense **p.x** pour l'ensemble des vecteurs de

[5] Ce symbole est celui des préordres : '$\succcurlyeq$' signifie « est préféré ou indifférent à … ».
[6] Plus précisément, la fonction est *quasi-concave* car la condition de convexité des préférences n'est pas stricte.

consommation **x** sur la courbe d'indifférence de **x*** ou dans la région ombrée au-dessus.

6.3.2. L'équilibre général selon Arrow et Debreu

En 1954, dans un modèle qui résonne comme l'aboutissement des dernières avancées, Kenneth Arrow et Gérard Debreu démontrent conjointement l'existence d'un équilibre général de concurrence parfaite. C'est la première démonstration vraiment satisfaisante. Elle fait appel à des mathématiques complexes. Elle jouit d'un prestige peut-être inégalé au sein de la profession économique, où beaucoup la considèrent comme le franchissement d'un seuil. Il y a l'avant- et l'après-1954. Nombre d'économistes apprécient en elle la formulation scientifique de la thèse intuitive d'Adam Smith concernant la *main invisible* du marché.

LA PREUVE DE L'EXISTENCE PAR ARROW ET DEBREU

Les ingrédients du modèle sont :

- des biens échangés (dont l'indice dans les équations est *i*), au nombre de *l*, comprenant des produits de consommation ou d'équipements ainsi que différents types de facteur travail.

- Chaque bien a un prix, qui ne peut pas être négatif. Les vecteurs **p** sont les vecteurs donnant les prix des *l* biens. Les agents prennent leurs décisions sur base des prix relatifs et non des prix absolus. Les vecteurs **p** sont normés à l'unité.

- des firmes (indicées *f*), dont le nombre *n* «includes not only existing ones but those that might enter the market under suitable conditions »[7]. Elles ont chacune un plan de production donné par le vecteur $\mathbf{y_f}$, lorsque le vecteur de prix **p** est donné. Ce vecteur comporte *l* éléments y_{fi} indiquant pour chaque bien la quantité vendue comme output (alors y_{fi} est positif) ou achetée comme input (alors y_{fi} est négatif).

- des consommateurs, ménages ou institutions (indicés *h*) au nombre de *m*, qui ont chacun un vecteur de consommation et de travail $\mathbf{x_h}$, lorsque le vecteur de prix **p** est donné. Ce vecteur comporte *l* éléments x_{hi} indiquant pour chaque bien la quantité du bien *i* achetée comme bien de consommation (alors x_{hi} est positif) ou vendue comme travail (alors x_{hi} est négatif). Lorsqu'un bien *i'* n'a d'usage que dans la production où il sert comme outil ou matière première, $x_{hi'}$ sera nul pour tous les consommateurs *h* ; par contre, on verra un $y_{fi'}$ négatif chez les producteurs qui l'emploient et un $y_{fi'}$ positif chez ceux qui le produisent.

- Les consommateurs ont chacun un vecteur $\boldsymbol{\varepsilon_h}$ indiquant leur allocation initiale de chaque bien et principalement leur capacité à fournir un travail

- Ils ont également un vecteur de détention d'actions $\boldsymbol{\alpha_h}$ indiquant pour chacune des *n* firmes, quel pourcentage du profit de cette firme leur revient.

On a : $\mathbf{y} = \Sigma_j \mathbf{y_f}$ qui est le vecteur de l'offre (nette) globale des entreprises

[7] Arrow-Debreu [17] pp. 267-268

$\mathbf{x} = \Sigma_i \, \mathbf{x_h}$ qui est le vecteur de la demande (nette) globale des consommateurs.

X_h est l'ensemble des vecteurs de consommation faisables du consommateur *h*, indépendamment de toute contrainte budgétaire. Les cas impossibles comme travailler plus de 24 heures par jour en sont exclus. De même, Y_f est l'ensemble des vecteurs de production faisables pour la firme *f*, compte tenu de la technologie. Il n'y a pas de plan **y** où le travail ne figure pas comme input ; le travail ne peut jamais être un output. De nombreuses hypothèses concernent les caractéristiques de X_h et Y_f ; voyons-en les plus significatives :

H1) Y_f, qui est l'ensemble de plans de production faisables ($\mathbf{y_f}$) de la firme *f* est fermé et convexe, ce qui exclut les rendements d'échelle croissants (cf. supra)[8].
H2) Une fonction d'utilité $u_h(\mathbf{x_h})$ attribue un niveau d'utilité à chaque vecteur de consommation possible pour le consommateur *h*. Cette fonction est continue sur X_h.
H3) Les préférences des consommateurs sont convexes et la saturation des besoins et désirs est exclue.

Les autres hypothèses sont :

H4) Chaque consommateur est capable d'offrir au moins un type de travail productif
H5) Les coefficients techniques ne sont pas fixes.

Les producteurs tentent de maximiser leur profit, c'est à dire $\mathbf{y_f.p}$. Il s'agit ici du profit BRUT et non du profit NET puisque aucun intérêt n'est déduit[9]. Comme les producteurs ont un comportement de *price taker*, ils n'agissent que sur les quantités et non sur le prix ; ils choisissent le vecteur $\mathbf{y_f}$ idéal, noté $\mathbf{y_f}^*$, parmi tous les plans de production faisables.

Les entreprises distribuent intégralement leur profit aux ménages, chacun d'eux recevant une fraction proportionnelle à la part de capital qu'il détient dans cette entreprise.

Les consommateurs (qui agissent également comme des *price takers*) tentent de maximiser leur utilité, tout en respectant leur contrainte budgétaire. Le vecteur idéal est noté $\mathbf{x_h}^*$.

Le triplet formé par les trois vecteurs liés **p*, y*, x*** forme un équilibre pour autant que soit satisfaite l'égalité entre l'offre et la demande sur les différents marchés. Cette condition s'écrit :

$$\mathbf{z} \leq 0 \text{ mais pour } z_i < 0, \text{ on a } p_i = 0 \qquad (6.20)$$

Le vecteur **z** est celui de la demande excédentaire. On a : $\mathbf{z = x - y - \varepsilon}$. A l'équilibre, ce vecteur devrait être nul, c'est-à-dire composé exclusivement d'éléments nuls ;

[8] Les rendements d'échelle CONSTANTS sont donc compatibles avec l'existence d'un équilibre général, même s'ils ne permettent pas de déterminer le montant à produire par chaque firme individuellement.
[9] Etonnant retour des choses : les classiques utilisaient le terme « profit » pour la rémunération globale de l'entrepreneur capitaliste. Les néoclassiques ont abandonné cet usage, gardant l'exclusivité du terme pour le résidu après rémunération de tous les facteurs. La première acception effectue son retour.

toutefois, dans le cas des biens libres, une demande excédentaire négative est admise pour autant que le prix correspondant soit nul.

Arrow et Debreu démontrent mathématiquement qu'un tel équilibre existe. La clé de voûte est, comme chez von Neumann le théorème du point fixe. La démonstration doit résoudre certaines difficultés, notamment tenir compte de l'interaction entre les consommations individuelles : étant donné les consommations de certains individus, des vecteurs deviennent impossibles pour les autres individus : pour résoudre cette difficulté, Arrow et Debreu font appel à la théorie des jeux.

Il importe de remarquer un point sur lequel le modèle d'Arrow-Debreu est en rupture par rapport à toute l'économie politique antérieure, y compris celle de Walras. Plus aucune proportionnalité n'est supposée entre le profit d'une entreprise et son capital. Le taux de profit des différentes entreprises ne tend pas vers l'égalité. L'équilibre général d'Arrow-Debreu ne peut donc pas revendiquer le statut d'équilibre à long terme.

Dans les années qui suivirent la publication de cette démonstration, Arrow et Debreu, ainsi que d'autres économistes, continuèrent à affiner la démonstration, surtout dans le but d'alléger les hypothèses. Debreu fournit ainsi une démonstration de l'existence où l'hypothèse H1 est remplacée par la convexité de *Y*, l'ensemble de la production possible de toute l'économie, ce qui est moins contraignant que la nécessité de la convexité dans chaque firme.

EQUILIBRE D'ARROW-DEBREU : CARACTERISTIQUES ET CAS PARTICULIERS

Cette démonstration constitue une étape fondamentale dans le développement de l'économie néowalrassienne, mais pas un terminus. Arrow et Debreu continuèrent à produire de nombreux théorèmes chacun de son côté. Ils publièrent également, chacun, un ouvrage de synthèse : « The Theory of Value : An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium » de Debreu sortit en 1959. Arrow écrivit « General competitive analysis » avec Frank Hahn en 1971.

Outre la question de l'existence de l'équilibre, Arrow, Debreu et Koopmans ont également redémontré, sur base de leur nouvelle approche mathématique, les théorèmes fondamentaux du bien-être.

Voyons maintenant quelques questions particulières abordées dans les deux ouvrages précités.

Les non-convexités

C'est le double processus de maximisation de l'utilité par les consommateurs et du profit par les firmes, qui détermine l'offre et la demande des différents biens. Or ce processus d'optimisation a pour condition, la convexité des ensembles X_i et Y_j. L'existence de l'équilibre dépend donc de l'hypothèse de convexité. Arrow et Hahn écrivent : « Convexity implies that responses of firms and households to changes in prices tend to be continuous ; even when jumps occur, every point in the whole interval between the two extremities of the jump is a permissible response so that there are no gaps in which an inequality between supply and demand can be fitted »[10]. Ils donnent l'exemple suivant (un cas d'école):

Soient deux biens *A* et *B*, le premier entrant dans la production du second et n'ayant pas d'autre utilisation. Nous nous intéressons à l'équilibre entre l'offre et la demande sur le marché du facteur *A*. Pour simplifier, supposons que l'offre de *A* (S_A) soit fixe (élasticité nulle). La demande de *A* dépendra de la production de *B*.

Commençons par le cas où l'ensemble Y_f est <u>convexe</u>, illustré par les compartiments $\boxed{A1}$ et $\boxed{A2}$ de la figure 6.7. Dans le compartiment $\boxed{A1}$, la fonction d'efficience révèle des rendements d'échelle d'abord constants, puis décroissants à partir d'une quantité égale à q'. Le compartiment $\boxed{A2}$ montre la courbe de demande de *A* (D_A) déduite de cette fonction de production, indiquant la quantité de *A* demandée en fonction du rapport PB/PA. Plus ce rapport de prix est élevé, plus le vecteur de prix s'approche de la verticalité.

- Si le rapport p_B/p_A est inférieur à un certain seuil *k* (donné par l'équation $y_A = -k.y_B$), son vecteur (le 3) sera fort penché vers la droite. Imaginons la figure 6.5 avec un tel vecteur ; l'impossibilité de la maximisation du profit est évidente. La firme ne peut échapper aux pertes qu'avec une production nulle ; elle choisira donc $y_A = 0$ pour ces rapports de prix.
- Si $p_B/p_A = k$ (vecteur 2), le vecteur de prix sera orthogonal au segment rectiligne de la courbe d'efficience. Le maximum de profit, égal à zéro[11], peut être obtenu pour n'importe quelle valeur de y_A comprise entre zéro et *q'*.
- Si $p_B/p_A > k$ (vecteur 1), la firme obtiendra un profit positif en consommant une quantité $y_A > q'$, qui va croissant avec p_B/p_A.

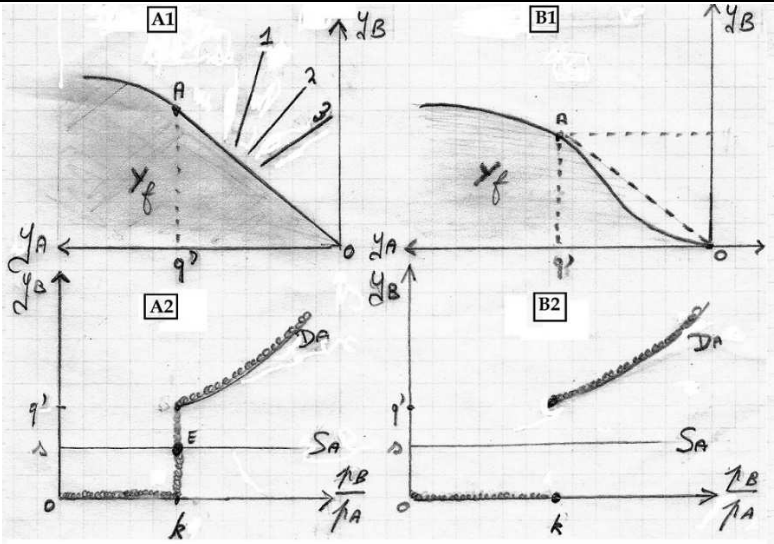
La courbe de demande de *A* ainsi construite coupe la courbe d'offre ; il y a donc un équilibre (E).

Si on conserve exactement les mêmes données du problème, sauf que le segment rectiligne de la courbe d'efficience est remplacé par un secteur à rendements croissants (Y_f <u>non convexe</u>), l'effet sur D_A est visible dans le compartiment $\boxed{B2}$.

- Pour les prix inférieurs ou supérieurs à *k*, rien ne change.
- Par contre, pour le prix *k*, sur la portion OA de la courbe d'efficience, aucune combinaison (y_A,y_B) autre que zéro et *q'* n'apporte un profit non négatif. Le producteur de *B* demandera y_A valant soit zéro, soit *q'* ; si l'offre de *A* est comprise entre ces bornes, l'offre et la demande ne se couperont pas et l'équilibre ne sera pas défini.

[10] Arrow & Hahn [16] p. 169
[11] Le produit de deux vecteurs orthogonaux est toujours nul.

Graphique 6.7 : non-convexités et équilibre



Arrow et Hahn s'intéressent aux économies comportant des <u>non-convexités</u>. Ils proposent une méthode permettant de mesurer l'ampleur absolue des non-convexités ainsi que celle du déséquilibre (les demandes excédentaires non nulles). Ils arrivent à la conclusion suivante : l'ampleur ABSOLUE du déséquilibre augmente avec celle des non-convexités mais elle reste constante lorsque varie la taille de l'économie (nombre d'agents). Par rapport à la taille de l'économie, toutes autres choses restant égales, la magnitude du déséquilibre provoqué par les non-convexités tend donc à se réduire sensiblement. L'idée sous-jacente est celle-ci : lorsque plusieurs firmes sont confrontées à un choix entre plusieurs plans de production également profitables, toutes n'opteront pas pour le même plan. Dans l'exemple ci-dessus, au prix *k*, certaines firmes produiraient *q'* et d'autres produiraient zéro. Supposons que le facteur *A* soit demandé par exactement DEUX firmes. La courbe de demande du marché, pour le prix *k*, comprendrait les trois valeurs : 0, q', 2q'. Les « trous » dans la courbe de demande gardent la magnitude *q'*, comme lorsqu'il n'y avait qu'une firme. Mais la diversité des comportements rendrait la demande agrégée assez proche de l'offre globale.

<u>Unicité de l'équilibre</u>

L'équilibre général d'Arrow-Debreu, est-il unique ? Equilibre unique signifie qu'une seule combinaison de prix permet à l'économie d'atteindre l'équilibre. Arrow et Hahn ont analysées les conditions de l'unicité dans l'ouvrage précité[12]. La matière est extrêmement complexe ; résumons leur analyse en deux mots.

Revenons à la matrice **A** dont il fut question lors de l'examen de la stabilité hicksienne. Hicks avait défini la caractéristique de cette matrice qui assurait la stabilité de l'équilibre (signes des déterminants des mineurs en alternance positifs et négatifs). Arrow et Hahn envisagent différents cas correspondant à des caractéristiques particulières de la matrice **A** et posent chaque fois la question : dans ce cas, l'équilibre est-il unique ? Cette analyse ne leur a pas permis de déterminer une condition nécessaire à l'unicité de l'équilibre. Par contre, diverses hypothèses relatives à cette matrice agissent comme condition suffisante. Toutefois, la plupart de ces conditions

[12] Il existe toute une littérature sur les sujets de l'unicité et de la stabilité. En somme, Arrow et Hahn font une espèce de synthèse.

mathématiques représentent des exigences, soit qui sont irréalistes, soit auxquelles il est difficile de trouver une signification économique.

En définitive, une condition sort du lot, plus réaliste et sensée que les autres : la *dominance diagonale*. Ce terme un peu barbare reflète que dans la matrice **A**, l'effet du prix des biens sur leur propre demande excédentaire est donné par les éléments qui constituent la diagonale (a_{11}, a_{22}…). Et justement, cette condition stipule que la demande excédentaire de tout bien est plus affectée par une variation de son propre prix que par une variation des autres prix. Les a_{ij} où $i \neq j$ sont inférieurs aux a_{ii}. Diverses conditions secondaires, que nous passons sous silence, s'imposent en outre pour que la dominance diagonale puisse être posée comme condition nécessaire à l'unicité.

La *dominance diagonale* est une condition moins contraignante qu'une autre condition à laquelle on pourrait penser : la *substituabilité brute* entre tous les biens de l'économie. Des biens *i* et *j* sont des substituts bruts si $a_{ij} > 0$, c'est-à-dire si le renchérissement de *j* fait croître la demande excédentaire de *i*. Arrow et Hahn montrent que la dominance diagonale est impliquée par la substituabilité brute mais que l'inverse n'est pas vrai. Vu l'existence de biens complémentaires, l'hypothèse de la substituabilité brute généralisée n'est pas réaliste.

Stabilité (dynamique) de l'équilibre général

Comme nous le savons déjà, l'heure est à la *stabilité dynamique*. Elle est qualifiée ainsi car l'analyse prend en compte le facteur temps. La variable *t* représentant le temps entre dans les équations. Le temps $t = 0$ correspond à la constatation initiale d'un déséquilibre. Celui-ci entraîne un ajustement du prix : cet ajustement prend un certain délai, pendant lequel le système de prix parcourt un « chemin ». Si au bout de ce chemin, l'économie arrive à l'équilibre, on peut conclure à la stabilité du système, même s'il faut que *t* tende vers l'infini pour que ce dénouement heureux atteigne sa plénitude. Ceci peut s'écrire :

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{p}(t) = \mathbf{p^*} \qquad (6.21)$$

p(t) est le vecteur de prix au temps *t* et **p*** est le vecteur de prix d'équilibre. Dans l'analyse de la stabilité dynamique, la vitesse du processus d'ajustement est importante : elle est donnée par le ratio dp_i/dt. On a :

$$dp_i/dt = F_i(z_i(\mathbf{p})) \qquad (6.22)$$

La vitesse d'ajustement du prix du bien *i* est une fonction (croissante) de la demande excédentaire sur ce marché, qui est elle-même fonction du système de prix dans son ensemble. La fonction F_i est différente d'un marché à l'autre, certains étant plus réactifs que d'autre au besoin d'ajustement.

Après ces préliminaires, résumons très brièvement les chapitres que **Arrow et Hahn** consacrent à la stabilité, dans l'ouvrage précité qui nous sert de référence. Bien que dans un deuxième temps, ils envisageront d'autres hypothèses, leur analyse part du *tâtonnement* walrassien, qui se caractérise par :

- des prix criés par le commissaire-priseur et
- l'interdiction de toute transaction avant que l'équilibre soit atteint.

L'aspect essentiel du problème est la règle que le commissaire-priseur est censé observer, règle que nos auteurs résument comme suit : « Never change any price if the given price vector is an equilibrium ; never leave all prices unchanged if the given price vector is not an equilibrium »[13]. La variation du vecteur de prix dont il est question dans la deuxième partie de la phrase est résumée par l'équation (6.22). Au commissaire de trouver la fonction F_i qui convient le mieux. Les biens libres font toutefois exception en ce sens qu'une offre excédentaire de leur part ne doit pas inciter à une baisse de leur prix.

Concernant le vecteur **p,** Arrow et Hahn l'envisagent de deux façons : soit les prix sont exprimés dans une unité abstraite, soit l'un des biens sert de numéraire et son prix est donc invariable. Le deuxième cas se révélera plus décevant, car le choix du numéraire ne sera pas toujours sans influence sur les conclusions en matière de stabilité.

Les équations (6.22) des différents marchés forment ensemble un système d'équations différentielles simultanées. La solution de ce système est un chemin parcouru par le système de prix ; comme le chemin parcouru à un moment donné dépend de *t* et des conditions initiales **p**(0), Arrow et Hahn notent la solution **p**(t|**p**(0)). Le lien entre le chemin et le point de départ est essentiel. Arrow et Hahn considèrent **p**(t|**p**(0)) comme un fonction continue de **p**(0). Pour mener cette analyse, ils sont obligés de poser, contre leur plein gré, que le chemin partant d'un **p**(0) donné est unique : les chemins parcourus à partir de conditions initiales différentes peuvent ne pas se rencontrer, mais un seul chemin est possible à partir d'une condition initiale donnée. Nos auteurs démontrent que dans ces conditions, si le chemin converge, il ne peut converger que vers un équilibre.

Concernant la stabilité du système, Arrow et Hahn l'envisagent à deux niveaux : la stabilité de la règle du commissaire et la stabilité de l'équilibre : « The auctioneer's rule will be called *globally stable* if for every **p**(0) > 0, the solution **p**(t|**p**(0)) approaches an equilibrium (…) If the rule followed by the auctioneer is globally stable and if the economy possesses a unique equilibrium then that *equilibrium* is called *globally stable*. If the economy possesses more than one equilibrium, then no equilibrium can be globally stable »[14]. La stabilité globale d'un équilibre postule celle de la règle, mais l'inverse n'est pas vrai.

Comment savoir si dans un cas donné, la règle du commissaire est stable ? La méthode de *Lyapounov* permet de résoudre le problème. La règle sera stable[15] si le système des équations (6.22) admet l'existence d'une fonction V[**p**(t|**p**(0)] qui a pour caractéristiques :

- d'être continue
- de converger pour tous les **p**(0) admissibles
- d'être constante si et seulement si **p**(0) est un équilibre.

Après la *stabilité globale* d'un équilibre, comparable à un aimant dont le champ se fait sentir quel que soit le point de départ (en déséquilibre), voyons la *stabilité locale* d'un équilibre, dont le champ d'attraction est limité à une zone formée par des vecteurs de prix assez proches du vecteur de prix d'équilibre. Ce concept permet d'étudier l'effet de petites déviations par rapport à un équilibre : s'en éloigne-t-on ou y est-on ramené ? Dans le cas d'un équilibre multiple, si la règle du commissaire est globalement stable,

[13] Arrow & Hahn [16] p. 266
[14] Arrow & Hahn [16] pp. 271-272
[15] Je passe sous silence le cas de plusieurs équilibres non isolés les uns des autres.

certains équilibres peuvent être localement stables mais pas tous. Ceci est illustré par la troisième figure du graphique 6.1 : la règle est globalement stable, mais les équilibres sont alternativement stables et instables (localement). En outre, comme nous le savons déjà, aucun de ces équilibres ne sera globalement stable (par définition).

Armés de la méthode de Lyapounov, Arrow et Hahn tentent de déterminer les conditions économiques qui assurent la stabilité. Comme pour la stabilité hicksienne et comme pour l'unicité de l'équilibre, les propriétés de la matrice **A** jouent un rôle prépondérant. Nos deux auteurs analysent de nombreux cas. En définitive, les deux seuls, où la stabilité globale de la règle est assurée, sans qu'il soit nécessaire d'adjoindre d'autres hypothèses, sont la *substituabilité brute* et l'hypothèse que tous les consommateurs sont identiques. Même la *dominance diagonale*, qui assurait l'unicité de l'équilibre, ne suffit pas pour en garantir la stabilité[16].

Arrow et Hahn tentent ensuite de se défaire de l'hypothèse trop lourde du *recontrat*. Les agents sont maintenant autorisés à acheter et vendre à tout prix, même s'il ne s'agit pas d'un prix d'équilibre. Toutefois leur analyse manque d'intérêt, car elle se limite au cas de l'*échange pur* (absence de production). Il convient de préciser que cette optique ne soustrait qu'une des deux hypothèses du tâtonnement walrassien. Arrow et Hahn préfèrent conserver l'hypothèse d'un commissaire-priseur qui crie les prix, dont il est très difficile de se passer. « For example, in a production economy, if every firm faces a horizontal demand curve (or thinks that it faces such a curve), it is not easy to visualize any firm changing the price at which its product is sold »[17]. Autrement dit, la vision traditionnelle de la concurrence parfaite condamne à conserver le commissaire-priseur… A moins de prendre le chemin d'Edgeworth qui correspond à la situation inverse : le recontrat est la règle, mais il n'y a pas de commissaire-priseur.

La conjecture d'Edgeworth remise à l'honneur

La *conjecture d'Edgeworth* est remise à l'honneur principalement par Herbert Scarf et Gérard Debreu, dans les années soixante. Voici comment ils présentent le problème[18] :

- « An <u>allocation</u> for the economy $\mathcal{E}$ specifies the commodity vector assigned to each agent ». Dans un processus d'échange pur, elle est une redistribution de l'allocation initiale ; elle n'est donc faisable que si la quantité de chaque bien dans la nouvelle distribution ne dépasse pas la quantité initiale.
- « A <u>coalition</u> S of agents <u>blocks</u> the allocation (x_i) if its members can redistribute their own initial commodity vectors among themselves so that every one of them is at least as satisfied as he is with the allocation (x_i) and at least one of them is more satisfied. »
- « The <u>core</u> of the economy is formally defined as the set of attainable allocations that no coalitions of agents blocks ». C'est donc la courbe des règlements finaux d'Edgeworth. Nous traduisons par *noyau.*

Ils démontrent mathématiquement que:

1) tout équilibre général de $\mathcal{E}$ est dans le noyau de $\mathcal{E}$.

[16] Un système peut satisfaire la condition de *dominance diagonale* pour tel choix de numéraire et pas pour tel autre. Qu'il y ait *dominance diagonale* avec un numéraire suffisait à l'unicité de l'équilibre. Par contre, la règle du commissaire pourrait être déclarée stable avec tel numéraire et instable avec tel autre.

[17] Arrow & Hahn [16] p. 325

[18] Debreu & Scarf [74] p 286

2) si une allocation (x_i) est dans le noyau de $\mathcal{E}$ pour tout nombre de participants à l'échange, elle doit être un équilibre général de cette économie.

Debreu et Scarf restent dans le schéma d'Edgeworth d'une économie multipliée : les agents sont répartis en groupes caractérisés par l'identité des goûts et des allocations initiales ; le nombre de ces groupes est quelconque mais constant : la croissance en taille de l'économie repose donc uniquement sur l'augmentation du nombre d'agents dans les groupes. Cette façon d'envisager l'extension de l'économie, certes un peu bizarre, sera abandonnée dans d'autres démonstrations de la conjecture d'Edgeworth (notamment Aumann en 1964).

L'EQUILIBRE INTERTEMPOREL ET L'INCERTITUDE

Parmi les divers raffinements qu'Arrow et Debreu apportent à leur théorie dans les années qui suivent la démonstration de l'existence de l'équilibre, il y a la prise en compte du temps et de l'incertitude. Commençons par le temps : une comparaison avec l'*équilibre temporaire* de Hicks s'impose. Voyons d'abord ce qu'il y a de commun entre les deux conceptions. Comme chez Hicks, les consommateurs et les firmes établissent des plans de consommation et de production intertemporels ; ils planifient leur production et leur consommation des différents biens pour toutes les périodes à venir. Comme chez Hicks, ces plans résultent d'une démarche d'optimisation.

A part cela, la conception d'Arrow et Debreu, souvent appelée *full intertemporal equilibrium*, s'oppose à l'*équilibre temporaire* ; d'une part, ils supposent l'existence de marchés non seulement pour les biens présents mais aussi pour TOUS les biens futurs à toutes les dates, alors que Hicks dédaignait les marchés à terme et ne retenait qu'un seul marché futur : celui des prêts de monnaie. Comme le lecteur, Arrow et Debreu savent que tous ces marchés futurs n'existent pas. Leur modèle est celui d'une économie « idéale » rendant possible toutes les optimisations. Sans un marché pour chaque date, sur lequel les agents peuvent opérer leurs transactions dès aujourd'hui, la répartition de la production et de la consommation dans le temps ne peuvent être optimisées. L'équilibre temporaire de Hicks est moins optimal mais plus réaliste.

Contrairement à celle de Hicks, l'économie d'Arrow-Debreu n'est pas *séquentielle*. Le processus de tâtonnement walrassien, la grand-messe au cours de laquelle tous les prix sont fixés et toutes les transactions conclues, se tient une seule fois : à la période initiale. Par la suite les agents n'auront plus qu'à mettre en pratique les livraisons de biens décidées initialement. Il n'y aura jamais de pénurie ou d'invendus puisque le processus de tâtonnement veille à équilibrer les marchés futurs jusqu'à l'horizon temporel. Dans un tel contexte, les livraisons ne doivent même pas s'accompagner d'un paiement monétaire. En fait le tâtonnement initial est un grand troc où tout le monde offre certaines choses présentes ou futures, en contrepartie d'autres choses présentes ou futures. Le vase de Chine que j'acquerrai en période 18 est la contrepartie du travail que j'aurai fourni pendant les périodes zéro à 17 ; le paiement, c'est tout simplement le fait que les échanges sont équilibrés grâce à un système de prix adéquat. Ceci constitue d'ailleurs une différence avec le fonctionnement réel des marchés futurs où le paiement a lieu à la livraison, bien que le prix soit fixé initialement.

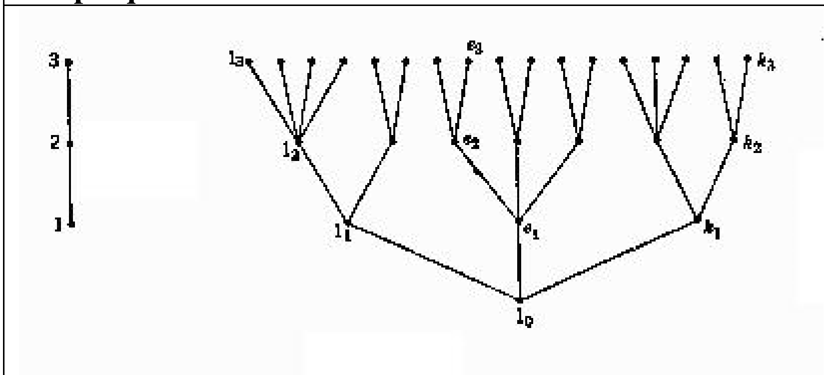
Chez Hicks comme chez Walras avant lui (rappelons-nous ses marchandises *U* et *E*), la monnaie et les titres figuraient dans la liste des biens. Dans un équilibre intertemporel complet, ils ne sont plus nécessaires. Il y a juste un grand troc de produits et de facteurs primaires. L'énoncé d'un modèle, dont la monnaie est absente, présuppose l'idée, soit que la monnaie n'affecte le mécanisme économique que superficiellement, soit que la prise en compte de la monnaie doit faire l'objet d'une étude distincte. Nous verrons au chapitre 6.5 comment des auteurs néo-walrassiens tentent d'intégrer la monnaie.

La conception de l'équilibre intertemporel complet d'Arrow et Debreu semble s'être imposée face à l'équilibre temporaire hicksien.

A première vue, il y a peu de place pour **l'incertitude** dans ce modèle. Arrow et Debreu veillent pourtant à lui en réserver une. Ils construisent une nouvelle théorie des choix en incertitude, qu'ils lient à leur équilibre général. C'est la théorie des biens à *l'état contingent*. Un parapluie en 2019 et un parapluie en 2020 sont deux biens différents. Mais un parapluie en 2020 si cette année est ensoleillée et un parapluie en 2020 si cette année est pluvieuse sont également deux biens différents. ENSOLEILLE et PLUVIEUX sont deux états alternatifs et ils sont aléatoires dans la mesure où les données climatiques de l'année 2020 sont indépendantes des actions des agents et inconnues à la période 0, lorsque se concluent les transactions.

A chaque période, quantité de situations peuvent évoluer de plusieurs façons ; des événements, soit qui concernent l'agent personnellement (sa santé, notamment le fait d'être en vie ou non, sa situation familiale…), soit qui concernent l'économie en général (tels produits qui deviennent abondants et meilleur marché ou au contraire se raréfient…). Debreu illustre cette théorie avec l'*arbre des événements*[19] :

Graphique 6.8 : l'arbre des événements



Voici un exemple sur trois périodes. Chaque état conserve la mémoire du chemin parcouru. Le nombre d'événements augmente à chaque période comme les branches d'un arbre.

Le nombre d'*états contingent* (aussi parfois appelés *événements*) est supposé être fini, mais on conçoit qu'il est astronomiquement grand. Il suffit de penser au nombre de facteurs influençant le moindre phénomène.

Voyons maintenant ce que savent et ce qu'ignorent les agents dans ce modèle. Ils ignorent le futur. Donc ils ne savent pas quel état contingent se concrétisera. Par contre, ils ont en tête la composition de l'ensemble des états possibles. Ils sont à même d'attribuer à chaque état une probabilité subjective. Et pour chaque état, dès la période initiale, ils peuvent échafauder un plan de production et de consommation optimal.

[19] Debreu [72] p. 107

Comment ces états contingents sont-ils intégrés dans la théorie de l'équilibre général ? La définition du bien est adaptée. « Un contrat de livraison d'une marchandise spécifie maintenant, outre ses propriétés physiques, son lieu et sa date de disponibilité, un événement dont la réalisation conditionne la livraison »[20]. Dans ces conditions, le prix p_{is} est « the price paid in return for a promise to supply one unit of commodity *i* if state *s* occurs and nothing otherwise »[21]. L'indice *s* renseigne à la fois sur l'état et la période. « Le paiement est fait irrévocablement, bien que la livraison n'ait pas lieu si les événements spécifiés ne se sont pas réalisés. Un agent qui achète un quintal de blé rouge d'hiver n°2 disponible à Chicago, à la date *t*, *quel que soit l'événement*, achète en fait autant de marchandises qu'il y a d'événements à la date *t* »[22].

Le vecteur d'activité $\mathbf{y_{fs}}$ est le vecteur de production de la firme *f* si l'état *s* advient. Un exemple serait la production d'une ferme si les conditions climatiques sont favorables. La variable à maximiser devient $\sum_i \sum_s p_{is}.y_{is}$.

Le cas du consommateur est rendu plus complexe par deux difficultés :

- « It should be noted that a preference ordering for consumption vectors in the new interpretation contains elements of judgement about the likelihoods of the different states of the world as well as elements of evaluation of tastes »[23]. Un vecteur comportant une consommation x_{is} très désirée mais improbable sera peut-être jugé inférieur à un autre vecteur proche où x_{is} est remplacé par un élément moins prisé mais plus probable. La théorie de l'*utilité espérée* (cf. 6.1.2 et 8.5) est une explication de la manière dont les probabilités subjectives affectent le jugement du consommateur. Mais elle n'est qu'une explication parmi d'autres. La théorie des biens à l'état contingent ne l'implique donc pas.
- La convexité des préférences reste une condition de l'existence d'un équilibre, mais il est démontré que les préférences ne sont convexes dans un monde incertain que si l'individu fait preuve d'aversion envers le risque.

N'est-il pas paradoxal que cette théorie attribue un caractère risqué à la situation des ménages, d'où l'appel aux probabilités, alors que la situation des entreprises en semble dénuée ? N'oublions pas que tous les contrats sont conclus à la période initiale ; la firme vend donc toute sa production dans tous les états possibles, qu'ils adviennent ou non. Au niveau des quantités vendues, il n'y a donc pas d'incertitude et le profit est connu dès la période initiale. Mais subrepticement, l'incertitude, qui est inévitable, vient se loger dans le système de prix : « Probabilities will, of course, be reflected in prices »[24]. Malheureusement, cette méthode rend plus difficile l'analyse de l'effet de l'incertitude sur les comportements. Comme on le constate, avec les *états contingents*, le modèle d'Arrow-Debreu fait un bond dans l'abstraction.

*

Le capital selon Malinvaud : voir extrait 38
L'incertitude dans l'équilibre général : voir extrait 39

---

[20] Debreu [72] p. 106
[21] Arrow & Hahn [16] p. 125
[22] Debreu [72] p. 108
[23] Arrow & Hahn [16] p. 123
[24] Diamond [75] p. 774